

## CHƯƠNG

## I

# ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

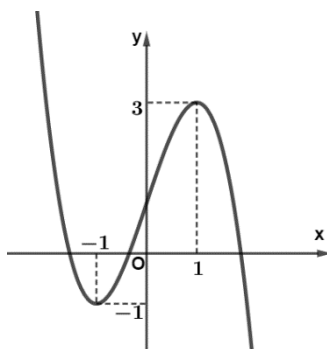
## BÀI 1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ



## HỆ THỐNG BÀI TẬP CÂU HỎI 4 MỆNH ĐỀ TRẢ LỜI ĐÚNG/SAI.

**Câu trắc nghiệm đúng sai.** Thí sinh trả lời câu hỏi. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

**Câu 1:** Cho hàm số bậc ba  $y = f(x)$  có đồ thị là đường cong trong hình dưới đây.



- a) Hàm số nghịch biến trên các khoảng  $(-\infty; -1)$  và  $(1; +\infty)$ .
- b) Đồ thị hàm số có điểm cực tiểu là  $(-1; -1)$ .
- c) Gọi  $a$  và  $b$  lần lượt là tung độ của điểm cực tiểu và điểm cực đại của hàm số ta có  $a^2 + b^2 = 10$ .
- d) Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị là  $x - y + 2 = 0$ .

**Lời giải**

|         |         |         |         |
|---------|---------|---------|---------|
| a) Đúng | b) Đúng | c) Đúng | d) Đúng |
|---------|---------|---------|---------|

a) Hàm số nghịch biến trên các khoảng  $(-\infty; -1)$  và  $(1; +\infty)$  **Đúng**.

Vì hàm số đồng biến trên các khoảng  $(-\infty; -1)$  và  $(1; +\infty)$ .

b) Đồ thị hàm số có điểm cực tiểu là  $(-1; -1)$ . **Đúng**

c) Gọi  $a$  và  $b$  lần lượt là hoành độ của điểm cực tiểu và điểm cực đại của hàm số ta có  $a^2 + b^2 = 10$ . **Đúng**

Vì tung độ của điểm cực tiểu là  $a = -1$  và điểm cực đại là  $b = 3$  nên  $a^2 + b^2 = 10$ .

d) Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là  $(d): x - y + 2 = 0$ .

**Đúng**

Vì đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là  $A(-1;1); B(1;3)$ . Phương trình đường thẳng đi qua hai

điểm  $A, B$  là:  $(d): \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{2} \Leftrightarrow x - y + 2 = 0$ .

**Câu 2:** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đạo hàm  $f'(x) = (x+1)(x-3)x^2$ .

a) Hàm số đạt cực trị tại  $x = -1; x = 3; x = 0$ .

b) Hàm số  $y = f(x)$  nghịch biến trên  $(-1;3)$ .

c) Hàm số  $y = f(x)$  đồng biến trên  $(-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$ .

d) Hàm số  $y = f(3x)$  nghịch biến trên  $\left(-\frac{1}{3}; 1\right)$ .

**Lời giải**

| a) Sai | b) Đúng | c) Sai | d) Đúng |
|--------|---------|--------|---------|
|--------|---------|--------|---------|

a) Hàm số đạt cực trị tại  $x = -1; x = 3; x = 0$ . **Sai**

$$\text{Vì } f'(x) = (x+1)(x-3)x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \\ x = 0 \end{cases}.$$

Tuy nhiên  $x = 0$  là nghiệm bậc chẵn của  $f'(x)$  nên  $x = 0$  không là điểm cực trị.

b) Hàm số  $y = f(x)$  nghịch biến trên  $(-1;3)$ . **Đúng**

$$\text{Cho } f'(x) < 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-3)x^2 < 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-3) < 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 3$$

Suy ra hàm số  $y = f(x)$  nghịch biến trên  $(-1;3)$ .

c) Hàm số  $y = f(x)$  đồng biến trên  $(-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$ . **Sai**

$$\text{Cho } f'(x) > 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-3)x^2 > 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-3) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x > 3 \end{cases}$$

Ta lập được bảng biến thiên  $f(-1)$

| $x$     | $-\infty$ | $-1$    |     | $3$    | $+\infty$ |
|---------|-----------|---------|-----|--------|-----------|
| $f'(x)$ | $+$       | $0$     | $-$ | $0$    | $+$       |
| $f(x)$  | $-\infty$ | $f(-1)$ |     | $f(3)$ | $+\infty$ |

## CHUYÊN ĐỀ I – ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Theo bảng biến thiên thì  $-1 < 3$  nhưng  $f(-1) > f(3)$  nên hàm số  $y = f(x)$  không thể đồng biến trên  $(-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$ .

**d)** Hàm số  $y = f(3x)$  nghịch biến trên  $\left(-\frac{1}{3}; 1\right)$ . **Đúng**

$$\begin{aligned} \text{Do } f'(x) &= (x+1)(x-3)x^2 \text{ nên ta có } y' = [f(3x)]' = 3f'(3x) = 3(3x+1)(3x-3)(3x)^2 \\ &= 3f'(3x) = 27x^2(3x+1)(3x-3). \end{aligned}$$

$$\text{Điều kiện hàm } y = f(3x) \text{ nghịch biến là } y' < 0 \Leftrightarrow 27x^2(3x+1)(3x-3) < 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < x < 1$$

Hàm số chỉ nghịch biến trên  $\left(-\frac{1}{3}; 1\right)$ .

**Câu 3:** Cho hàm số  $f(x)$  có bảng biến thiên như sau:

|         |           |      |     |     |           |     |
|---------|-----------|------|-----|-----|-----------|-----|
| $x$     | $-\infty$ | $-2$ | $0$ | $2$ | $+\infty$ |     |
| $f'(x)$ | $-$       | $0$  | $+$ | $-$ | $0$       | $+$ |
| $f(x)$  | $+\infty$ | $1$  | $3$ | $1$ | $+\infty$ |     |

- a) Giá trị cực đại của hàm số  $f(x)$  bằng 3.
- b) Hàm số  $f(x)$  đồng biến trên khoảng  $(1; 3)$ .
- c)  $f(-10) > f(-3)$ .
- d) Đồ thị hàm số  $f(x)$  có ba điểm cực trị là ba đỉnh tam giác có diện tích bằng 4.

**Lời giải**

|                |               |                |                |
|----------------|---------------|----------------|----------------|
| <b>a) Đúng</b> | <b>b) Sai</b> | <b>c) Đúng</b> | <b>d) Đúng</b> |
|----------------|---------------|----------------|----------------|

- a)** Giá trị cực đại của hàm số bằng 3. **Đúng**
- b)** Hàm số đồng biến trên các khoảng  $(-2; 0)$  và  $(2; +\infty)$ . **Đúng**
- c)**  $f(-10) > f(-3)$ . **Đúng** vì hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; -2)$  nên  $f(-10) > f(-3)$ .
- d)** Đồ thị hàm số  $f(x)$  có ba điểm cực trị là ba đỉnh tam giác có diện tích bằng 4. **Đúng**

Đồ thị hàm số có ba điểm cực trị  $A(0; 3), B(-2; 1), C(2; 1)$

Tam giác  $ABC$  cân ở  $A$ . Gọi  $H(0; 1)$  là trung điểm đoạn  $BC$ .

$$\text{Ta có } AH = 2, BC = 4. \text{ Diện tích } ABC \text{ là } S = \frac{1}{2} AH \cdot BC = 4.$$

**Câu 4:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau

|       |           |      |     |     |           |     |     |
|-------|-----------|------|-----|-----|-----------|-----|-----|
| $x$   | $-\infty$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |     |     |
| $y''$ | $-$       | $0$  | $+$ | $0$ | $-$       | $0$ | $+$ |
| $y$   | $+\infty$ |      | $3$ |     | $+\infty$ |     |     |
|       |           | $0$  |     | $0$ |           |     |     |

- a) Hàm số đồng biến trên các khoảng  $(0;3)$  và  $(0;+\infty)$ .
- b) Hàm số đồng biến trên khoảng  $(2;+\infty)$ .
- c) Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số với hoành độ không âm là  $\frac{x}{1} + \frac{y}{3} = 1$ .
- d) Ba điểm cực trị của đồ thị hàm số tạo thành một tam giác có diện tích bằng 3.

**Lời giải**

|               |                |                |                |
|---------------|----------------|----------------|----------------|
| <b>a) Sai</b> | <b>b) Đúng</b> | <b>c) Đúng</b> | <b>d) Đúng</b> |
|---------------|----------------|----------------|----------------|

|       |           |      |     |     |           |     |     |
|-------|-----------|------|-----|-----|-----------|-----|-----|
| $x$   | $-\infty$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |     |     |
| $y''$ | $-$       | $0$  | $+$ | $0$ | $-$       | $0$ | $+$ |
| $y$   | $+\infty$ |      | $3$ |     | $+\infty$ |     |     |
|       |           | $0$  |     | $0$ |           |     |     |

- a) Hàm số đồng biến trên các khoảng  $(0;3)$  và  $(0;+\infty)$  **Sai**.

Vì hàm số đồng biến trên các khoảng  $(-1;0)$  và  $(1;+\infty)$ .

- b) Hàm số đồng biến trên khoảng  $(2;+\infty)$  **Đúng**.

Vì hàm số đồng biến trên các khoảng  $(-1;0)$  và  $(1;+\infty)$

- c) Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số với hoành độ không âm là  $\frac{x}{1} + \frac{y}{3} = 1$

**Đúng**

Vì đồ thị hàm số có hai điểm cực trị với hoành độ không âm là  $A(0;3)$  và  $B(1;0)$  nên đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số với hoành độ không âm là  $\frac{x}{1} + \frac{y}{3} = 1$ .

- d) Ba điểm cực trị của đồ thị hàm số tạo thành một tam giác có diện tích bằng 3 **Đúng**.

Vì đồ thị hàm số có hai điểm cực trị với hoành độ không âm là  $A(0;3)$ ,  $B(1;0)$  và  $C(-1;0)$  nên diện tích tam giác  $ABC$  là  $S = \frac{1}{2}|y_A - y_B| \cdot |x_B - x_C| = \frac{1}{2}|3-0| \cdot |1+1| = 3$ .

**Câu 5:** Đồ thị hàm số  $y = f(x) = x^3 - 3x$

- Hàm số  $f(x)$  luôn đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .
- Hàm số  $f(x)$  nghịch biến trên khoảng  $(-1;1)$ .
- Hàm số  $f(x)$  đạt cực tiểu tại điểm  $x_0 = -1$ .
- Đồ thị hàm số  $f(x)$  có hai cực trị  $A$  và  $B$ . Điểm  $M(0;-1)$  thuộc đường thẳng  $AB$ .

**Lời giải**

|               |                |                |               |
|---------------|----------------|----------------|---------------|
| <b>a) Sai</b> | <b>b) Đúng</b> | <b>c) Đúng</b> | <b>d) Sai</b> |
|---------------|----------------|----------------|---------------|

$$y = f(x) = x^3 - 3x \text{ có } f'(x) = 3x^2 - 3; f'(0) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

BXD:

|    |           |    |   |           |   |
|----|-----------|----|---|-----------|---|
| x  | $-\infty$ | -1 | 1 | $+\infty$ |   |
| y' | +         | 0  | - | 0         | + |

Từ BXD ta thấy

- Sai.
- Đúng.
- Đúng (Do  $y'$  đổi dấu từ - sang + khi qua 1 nên  $x=1$  là điểm cực tiểu).
- Sai. Ta có đồ thị có 2 điểm cực trị là  $A(-1;2), B(1;-2)$  có pt đường thẳng qua 2 điểm A, B là  $2x + y = 0$  nên điểm  $M(0;-1)$  không thuộc đường thẳng **AB**.

**Câu 6:** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R}$  và có bảng biến thiên như hình bên dưới.

|         |           |            |            |     |            |            |           |     |
|---------|-----------|------------|------------|-----|------------|------------|-----------|-----|
| $x$     | $-\infty$ | $-2$       | $0$        | $2$ | $+\infty$  |            |           |     |
| $f'(x)$ |           | $-$        | $0$        | $+$ | $0$        | $-$        | $0$       | $+$ |
| $f(x)$  | $+\infty$ |            |            | $1$ |            |            | $+\infty$ |     |
|         |           | $\searrow$ | $\nearrow$ |     | $\searrow$ | $\nearrow$ |           |     |
|         |           | $-2$       |            |     | $-2$       |            |           |     |

Các khẳng định sau đây đúng hay sai?

- $f(x)$  đồng biến trên khoảng  $(-2;0)$ .
- $f(x)$  nghịch biến trên khoảng  $(0;+\infty)$ .
- $\forall x_1, x_2 \in (2;+\infty), x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- $\forall x_1, x_2 \in (-\infty;+\infty), f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Lời giải

| a) Đúng | b) Sai | c) Đúng | d) Sai |
|---------|--------|---------|--------|
|---------|--------|---------|--------|

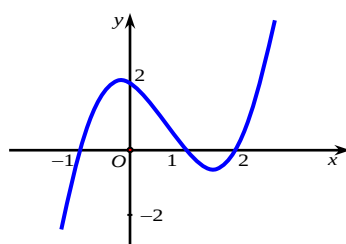
a) Dựa vào BBT, ta có:  $f'(x) > 0, \forall x \in (-2; 0)$ . Suy ra  $f(x)$  đồng biến trên khoảng  $(-2; 0)$ . Vậy a) đúng.

b) Tương tự b) sai.

c) Trên khoảng  $(2; +\infty)$  hàm số đồng biến nên  $\forall x_1, x_2 \in (2; +\infty), x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ . Do đó c) đúng.

d) Theo BBT, ta có  $f(-2) = f(2) = -2$  nên d) sai.

**Câu 7:** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R}$  và có đạo hàm  $f'(x)$ . Đồ thị của hàm số  $f'(x)$  như hình dưới đây.



Các mệnh đề sau **đúng** hay **sai**?

a) Hàm số  $y = f(x)$  đồng biến trên khoảng  $(-\infty; 0)$ .

b) Hàm số  $y = f(x)$  đồng biến trên khoảng  $(-1; 1)$ .

c) Hàm số  $y = f(x)$  có ba điểm 3 điểm cực trị.

d) Hàm số  $y = f(3 - x^2)$  có 6 điểm cực trị

Lời giải

| a) sai | b) đúng | c) đúng | d) sai |
|--------|---------|---------|--------|
|--------|---------|---------|--------|

Từ đồ thị của hàm số  $f'(x)$  ta có

$$+ f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}.$$

+ Bảng biến thiên

|         |                                                                                      |      |     |     |           |     |     |
|---------|--------------------------------------------------------------------------------------|------|-----|-----|-----------|-----|-----|
| $x$     | $-\infty$                                                                            | $-1$ | $1$ | $2$ | $+\infty$ |     |     |
| $f'(x)$ | $-$                                                                                  | $0$  | $+$ | $0$ | $-$       | $0$ | $+$ |
| $f(x)$  |  |      |     |     |           |     |     |

- a) Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số  $y = f(x)$  đồng biến trên khoảng  $(-\infty; 0)$  là sai.
- b) Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số  $y = f(x)$  đồng biến trên khoảng  $(-1; 1)$  là đúng.
- c) Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số  $y = f(x)$  có ba điểm 3 điểm cực trị là đúng
- d) Ta có  $y = f(3 - x^2)$

$$+ y' = -2x \cdot f'(3 - x^2)$$

$$+ y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(3 - x^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3 - x^2 = -1 \\ 3 - x^2 = 1 \\ 3 - x^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \\ x = \pm \sqrt{2} \\ x = \pm 1 \end{cases}$$

Do  $y' = 0$  có 7 nghiệm phân biệt nên hàm số  $y = f(3 - x^2)$  có 7 điểm cực trị

Vậy d) sai.

**Câu 8:** Cho hàm số  $f(x) = \ln x, \forall x \in (0; +\infty)$ . Các mệnh đề sau **đúng** hay **sai**?

- a) Hàm số trên luôn đồng biến trên tập xác định.
- b) Hàm số  $y = f(x^2 - 2x)$  có tập xác định là  $D = (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$ .
- c) Hàm số  $y = f(x^2 - 2x)$  có một điểm cực trị.
- d) Có 6 giá trị nguyên dương của tham số  $m$  để hàm số  $y = f(x^2 - mx)$  luôn đồng biến trên khoảng  $(3; +\infty)$ .

**Lời giải**

| a) Đúng | b) Đúng | c) Sai | d) Sai |
|---------|---------|--------|--------|
|---------|---------|--------|--------|

a) Ta có:  $y' = f'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x} > 0 \forall x \in (0; +\infty)$ . Vậy hàm số luôn đồng biến trên tập xác định.

b) Ta có:  $f(x^2 - 2x) = \ln(x^2 - 2x)$ .

ĐKXĐ:  $x^2 - 2x > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x < 0 \end{cases}$ . Vậy  $D = (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$ .

c) Ta có:  $\left[ f(x^2 - 2x) \right]' = \left[ \ln(x^2 - 2x) \right]' = \frac{2x - 2}{x^2 - 2x} \forall x \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$ .

Xét  $\left[ f(x^2 - 2x) \right]' = 0 \Leftrightarrow \frac{2x - 2}{x^2 - 2x} = 0 \Leftrightarrow x = 1$  (KTĐK). Vậy hàm số không có cực trị.

d) Ta có:  $y = f(x^2 - mx) = \ln(x^2 - mx)$  đồng biến trên khoảng  $(3; +\infty)$ .

$$y_{cbt} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - mx > 0 \\ \left[ f(x^2 - mx) \right]' = \frac{2x - m}{x^2 - mx} > 0 \end{cases} \forall x \in (3; +\infty).$$

$$y_{cbt} \Leftrightarrow \begin{cases} x > m \\ x > \frac{m}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x > m \quad \forall x \in (3; +\infty) \Leftrightarrow m \leq 3$$

Do  $m$  là số nguyên dương nên  $m \in \{1; 2; 3\}$ . Có ba giá trị nguyên dương của  $m$

**Câu 9:** Cho hàm số  $y = f(x) = \frac{-x^2 + 2x + 2}{x+1}$ . Các khẳng định sau đây đúng hay sai?

- a) Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; -5)$ .
- b) Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-2; 0)$ .
- c) Với mọi  $a, b \in (1; +\infty)$  và  $a < b$  thì  $f(a) < f(b)$ .
- d) Gọi  $A, B$  là 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số  $y = f(x)$ . Đường thẳng  $AB$  cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 1.

**Lời giải**

|                |               |               |                |
|----------------|---------------|---------------|----------------|
| <b>a) Đúng</b> | <b>b) Sai</b> | <b>c) Sai</b> | <b>d) Đúng</b> |
|----------------|---------------|---------------|----------------|

a) Đúng.

Tập xác định:  $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ .

Ta có:  $y' = \frac{-x^2 - 2x}{(x+1)^2}$ ;  $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$  hoặc  $x = -2$ .

Bảng biến thiên:

|      |           |      |           |     |           |           |
|------|-----------|------|-----------|-----|-----------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-2$ | $-1$      | $0$ | $+\infty$ |           |
| $y'$ | $-$       | $0$  | $+$       | $+$ | $0$       | $-$       |
| $y$  | $+\infty$ | $6$  | $+\infty$ | $2$ | $-\infty$ | $-\infty$ |

Từ bảng biến thiên, ta suy ra hàm số nghịch biến trên các khoảng  $(-\infty; -2)$  và  $(0; +\infty)$ . Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; -5)$  là khẳng định đúng.

b) Sai.

Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-2; 0)$  là khẳng định sai vì  $y = f(x)$  không xác định tại  $x = -1 \in (-2; 0)$ .

c) Sai.

Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(1; +\infty)$  nên với mọi  $a, b \in (1; +\infty)$  và  $a < b$  thì  $f(a) > f(b)$ . Do đó, khẳng định c sai.

d) Đúng.

Đường thẳng  $AB$  có phương trình:  $y = \frac{(-x^2 + 2x + 2)'}{(x+1)'} = -2x + 2$ .

Phương trình hoành độ giao điểm của  $AB$  và  $Ox$  có dạng:  $-2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ . Vậy  $AB$  cắt  $Ox$  tại điểm  $M(1; 0)$ . Vậy khẳng định d đúng.

**Câu 10:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình vẽ.

|      |           |      |                |           |               |     |     |
|------|-----------|------|----------------|-----------|---------------|-----|-----|
| $x$  | $-\infty$ | $-4$ | $4$            | $+\infty$ |               |     |     |
| $y'$ |           | $-$  | $0$            | $+$       | $0$           | $-$ |     |
| $y$  | $0$       |      | $-\frac{1}{8}$ |           | $\frac{1}{8}$ |     | $0$ |

Các khẳng định sau đúng hay sai?

- a) Trên khoảng  $(4; +\infty)$  thì  $y' < 0$ .
- b) Trên khoảng  $(-4; +\infty)$  thì  $y' > 0$ .
- c) Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-4; 4)$ .
- d) Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(4; +\infty)$ .

**Lời giải**

|                |               |                |                |
|----------------|---------------|----------------|----------------|
| <b>a) Đúng</b> | <b>b) Sai</b> | <b>c) Đúng</b> | <b>d) Đúng</b> |
|----------------|---------------|----------------|----------------|

**a) Đúng.**

Từ bảng biến thiên, ta có  $y' < 0$  trên khoảng  $(4; +\infty)$

**b) Sai.**

Từ bảng biến thiên, ta có  $y' > 0$  trên khoảng  $(-4; 4)$  và  $y' < 0$  trên khoảng  $(4; +\infty)$ .

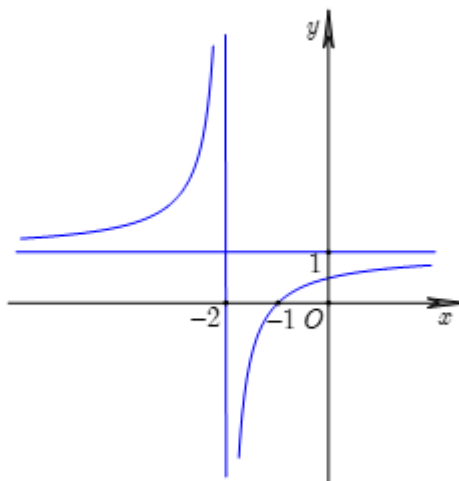
**c) Đúng.**

Từ bảng biến thiên, ta có trên khoảng  $(-4; 4)$  đồ thị hàm số có hướng đi lên từ trái qua phải nên hàm số đồng biến.

**d) Đúng.**

Vì dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số nghịch biến trên khoảng  $(4; +\infty)$ .

**Câu 11:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ



Các khẳng định sau đúng hay sai?

- a) Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-\infty; -2)$ .
- b) Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-2; +\infty)$ .
- c) Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-2; +\infty)$ .
- d) Hàm số đồng biến trên khoảng  $(0; +\infty)$ .

**Lời giải**

|                |               |                |                |
|----------------|---------------|----------------|----------------|
| <b>a) Đúng</b> | <b>b) Sai</b> | <b>c) Đúng</b> | <b>d) Đúng</b> |
|----------------|---------------|----------------|----------------|

**a) Đúng**

Từ đồ thị hàm số, ta có hàm số đồng biến trên khoảng  $(-\infty; -2)$ .

**b) Sai**

Từ đồ thị hàm số, ta có hàm số đồng biến trên khoảng  $(-2; +\infty)$ .

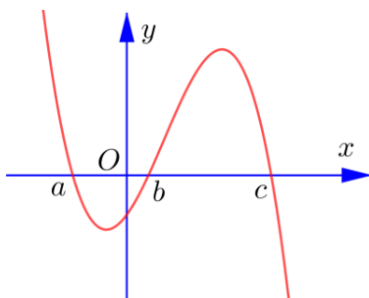
**c) Đúng**

Từ đồ thị hàm số, ta có hàm số đồng biến trên khoảng  $(-2; +\infty)$ .

**d) Đúng**

Từ đồ thị hàm số, ta có hàm số đồng biến trên khoảng  $(-2; +\infty)$  nên hàm số đồng biến trên khoảng  $(0; +\infty)$ .

**Câu 12:** Đồ thị của đạo hàm bậc nhất  $y = f'(x)$  của hàm số  $f(x)$  được cho trong hình dưới đây.



Trong mỗi ý ở câu sau, hãy chọn đúng hay sai.

- a) Với  $\forall x \in (-\infty; a)$  thì  $f'(x) > 0$ .
- b) Với  $\forall x \in (a; c)$  thì  $f'(x) < 0$ .
- c) Hàm số  $y = f(x)$  đồng biến trên khoảng  $(b; c)$ .
- d) Hàm số  $y = f(x)$  nghịch biến trên khoảng  $(c; +\infty)$ .

**Lời giải**

|               |               |                |                |
|---------------|---------------|----------------|----------------|
| <b>a) Sai</b> | <b>b) Sai</b> | <b>c) Đúng</b> | <b>d) Đúng</b> |
|---------------|---------------|----------------|----------------|

**a) Sai.**

Từ đồ thị của hàm số  $y = f'(x)$ , ta thấy trên khoảng  $(a; b)$  đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  nằm dưới trục hoành nên với  $\forall x \in (-\infty; a)$   $f'(x) < 0$ .

**b) Sai.**

Từ đồ thị của hàm số  $y = f'(x)$ , ta thấy trên khoảng  $(a; b)$  đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  nằm dưới trục hoành và trên khoảng  $(b; c)$  đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  nằm trên trục hoành nên với  $\forall x \in (a; b)$   $f'(x) < 0$  và với  $\forall x \in (b; c)$   $f'(x) > 0$ .

**c) Đúng.**

Từ đồ thị của hàm số  $y = f'(x)$ , ta thấy trên khoảng  $(b; c)$  đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  nằm trên trục hoành nên hàm số đồng biến trên khoảng  $(b; c)$ .

**d) Đúng**

Từ đồ thị của hàm số  $y = f'(x)$ , ta thấy trên khoảng  $(c; +\infty)$  đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  nằm trên trục hoành nên hàm số nghịch biến trên khoảng  $(c; +\infty)$ .

**Câu 13:** Cho hàm số  $y = \frac{x-1}{x+m}$ . Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

- a) Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định khi  $m \geq -1$ .
- b) Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-1; +\infty)$  khi  $m \geq 1$ .
- c) Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-\infty; -5)$  khi  $m \leq 5$ .
- d) Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-2; 7)$  khi  $m \geq 2$ .

**Lời giải**

|               |                |               |                |
|---------------|----------------|---------------|----------------|
| <b>a) Sai</b> | <b>b) Đúng</b> | <b>c) Sai</b> | <b>d) Đúng</b> |
|---------------|----------------|---------------|----------------|

Ta có hàm số  $y = \frac{x-1}{x+m}$  có tập xác định  $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$ .

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{m+1}{(x+m)^2}.$$

- a) Sai:** Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định khi  $m+1 > 0 \Leftrightarrow m > -1$ .

**b) Đúng:** Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-1; +\infty)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+1 > 0 \\ -m \notin (-1; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ -m \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 1.$$

**c) Sai:** Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-\infty; -5)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+1 > 0 \\ -m \notin (-\infty; -5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ -m \geq -5 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m \leq 5$$

**d) Đúng:** Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-2; 7)$ .

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+1 > 0 \\ -m \notin (-2; 7) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ -m \leq -2 \\ -m \geq 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ m \geq 2 \\ m \leq -7 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 2.$$

**Câu 14:** Cho hàm số  $y = 2x^3 - 3(2m+1)x^2 + 6m(m+1)x + 1$ . Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

**a)** Không tồn tại  $m$  để hàm số đã cho nghịch biến trên  $\mathbb{R}$ .

**b)** Khi  $m > 1$  thì hàm số đã cho đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .

**c)** Khi  $m = \frac{5}{6}$  thì hàm số đã cho nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng 2.

**d)** Khi  $m \leq 1$  thì hàm số đã cho đồng biến trên khoảng  $(2; +\infty)$ .

**Lời giải**

| a) Đúng | b) Sai | c) Sai | d) Đúng |
|---------|--------|--------|---------|
|---------|--------|--------|---------|

Tập xác định  $D = \mathbb{R}$ .

Ta có  $y' = 6x^2 - 6(2m+1)x + 6m(m+1)$ .

**a) Đúng:** Để hàm số nghịch biến trên  $\mathbb{R} \Rightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6 < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \text{ (vô lí).}$$

Vậy không tồn tại  $m$  để hàm số đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .

**b) Sai:** Để hàm số đồng biến trên  $\mathbb{R} \Rightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \Delta \leq 0 \Leftrightarrow (2m+1)^2 - 4m(m+1) \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq 0 \text{ (vô lí).}$$

Vậy không tồn tại  $m$  để hàm số đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .

**c) Sai:** Vì  $a = 2 > 0$  nên hàm số đã cho nghịch biến trên một đoạn khi và chỉ khi phương trình

$$y' = 0 \text{ có hai nghiệm phân biệt } \Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow (2m+1)^2 - 4m(m+1) > 0 \Leftrightarrow 1 > 0 \Leftrightarrow m \in \mathbb{R}.$$

Theo định lý Vi-ét, ta có  $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m + 1 \\ x_1 x_2 = m(m + 1) \end{cases}$

Để hàm số đã cho nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng 2 thì

$$\begin{aligned} |x_1 - x_2| = 2 &\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = 4 \\ &\Leftrightarrow (2m + 1)^2 - 4m(m + 1) = 4 \Leftrightarrow 1 = 4 \text{ (vô lý).} \end{aligned}$$

Vậy không tồn tại  $m$  để hàm số đã cho nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng 2.

**d) Đúng:** Để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng  $(2; +\infty)$  thì ta xét hai trường hợp

**Trường hợp 1:** Hàm số đồng biến trên  $\square \Rightarrow y' \geq 0, \forall x \in \square$

$$\Leftrightarrow \Delta \leq 0 \Leftrightarrow (2m + 1)^2 - 4m(m + 1) \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq 0 \text{ (vô lý).}$$

**Trường hợp 2:** Phương trình  $y' = 0$  có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 \leq 2 &\Leftrightarrow x_1 - 2 < x_2 - 2 \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 + x_2 - 4 < 0 \\ x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 \geq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 1 > 0 \\ 2m - 3 < 0 \\ m(m + 1) - 2(2m + 1) + 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in \square \\ m < \frac{3}{2} \\ m \in (-\infty; 1] \cup [2; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-\infty; 1]. \end{aligned}$$

Vậy  $m \leq 1$  thì hàm số đã cho đồng biến trên khoảng  $(2; +\infty)$ .

**Câu 15:** Cho một tấm tôn hình chữ nhật có kích thước  $80(cm).50(cm)$ , người ta cắt đi ở bốn góc của tấm tôn bốn hình vuông bằng nhau để khi gấp lại được một chiếc hộp (không nắp). Gọi cạnh hình vuông được cắt đi là  $x(cm)$ . Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

- a) Điều kiện của  $x$  là  $0 < x < 50$ .
- b) Thể tích  $V$  của hộp là:  $V = x(80 - x)(50 - x)$ .
- c) Thể tích của hình hộp khi  $x = 10(cm)$  là  $28000(cm^3)$ .
- d) Thể tích của hình hộp lớn nhất là  $18000(cm^3)$ .

**Lời giải**

|               |               |               |                |
|---------------|---------------|---------------|----------------|
| <b>a) Sai</b> | <b>b) Sai</b> | <b>c) Sai</b> | <b>d) Đúng</b> |
|---------------|---------------|---------------|----------------|

Gọi cạnh hình vuông được cắt đi là  $x(cm)$ ,  $0 < x < 25$

Thể tích  $V$  của hộp là:  $V = x(80 - 2x)(50 - 2x)$ .

Xét hàm số  $f(x) = x(80 - 2x)(50 - 2x)$  ( $0 < x < 25$ ).

Với  $x \in (0; 25)$ , ta có:

$$f'(x) = 12x^2 - 520x + 4000; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 10.$$

Bảng biến thiên:

|         |   |         |     |
|---------|---|---------|-----|
| $x$     | 0 | 10      | 25  |
| $f'(x)$ | + | 0       | -   |
| $f(x)$  | 0 | ↗ 18000 | ↘ 0 |

Suy ra  $V$  đạt giá trị lớn nhất bằng  $18000(cm^3)$  khi  $x = 10$ .

a) Sai.

b) Sai.

c) Sai.

d) Đúng.

**Câu 16:** Cho hàm số  $y = x^3 - 3mx^2 + 3(2m - 1)x + 5m - 4$ . Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

a) Khi  $m = 1$  thì hàm số đã cho đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .

b) Hàm số đã cho nghịch biến trên  $\mathbb{R}$  với mọi  $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

c) Khi  $m \leq \frac{3}{2}$  thì hàm số đã cho đồng biến trên khoảng  $(2; 3)$ .

d) Khi  $m \leq 1$  thì hàm số đã cho đồng biến trên khoảng  $(-\infty; 5)$ .

**Lời giải**

|                |               |                |               |
|----------------|---------------|----------------|---------------|
| <b>a) Đúng</b> | <b>b) Sai</b> | <b>c) Đúng</b> | <b>d) Sai</b> |
|----------------|---------------|----------------|---------------|

Tập xác định  $D = \mathbb{R}$ .

Ta có  $y' = 3x^2 - 6mx + (6m - 3)$ .

a) Đúng: Để hàm số đồng biến trên  $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 9m^2 - 3(6m - 3) \leq 0 \Leftrightarrow m = 1$$

Vậy  $m = 1$  hàm số đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .

**b) Sai:** Ta có  $y' = 3x^2 - 6mx + (6m - 3)$  và do  $a = 3 > 0$  nên không tồn tại  $m$  để hàm số nghịch biến trên  $\mathbb{R}$ .

**c) Đúng:** Vì  $a = 3 > 0$  nên hàm số đã cho đồng biến trên khoảng  $(2; 3)$

$$\Leftrightarrow y' \geq 0 \forall x \in (2; 3) \Leftrightarrow 3x^2 - 6mx + (6m - 3) \geq 0 \quad \forall x \in (2; 3)$$

$$\Leftrightarrow m(2 - 2x) \geq 1 - x^2 \quad \forall x \in (2; 3)$$

$$\Leftrightarrow m \leq \frac{1 - x^2}{2 - 2x} \quad \forall x \in (2; 3)$$

$$\Leftrightarrow m \leq \frac{1 + x}{2} < \frac{3}{2} \quad \forall x \in (2; 3).$$

**d) Sai:** Để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng  $(-\infty; 5)$  thì ta xét hai trường hợp

**Trường hợp 1:** Hàm số đồng biến trên  $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 9m^2 - 3(6m - 3) \leq 0 \Leftrightarrow m = 1.$$

**Trường hợp 2:** Phương trình  $y' = 0$  có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn

$$5 \leq x_1 < x_2 \Leftrightarrow 0 \leq x_1 - 5 < x_2 - 5 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 + x_2 - 10 > 0 \\ x_1 x_2 - 5(x_1 + x_2) + 25 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9m^2 - 18m + 9 > 0 \\ 2m - 10 > 0 \\ 2m - 1 - 5 \cdot 2m + 25 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \\ m > 5 \\ m \leq 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m \in \emptyset$$

Vậy  $m = 1$  thì hàm số đã cho đồng biến trên khoảng  $(-\infty; 5)$ .

**Câu 17:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau:

|      |           |      |            |            |      |            |            |           |
|------|-----------|------|------------|------------|------|------------|------------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$ |            | $0$        |      | $1$        |            | $+\infty$ |
| $y'$ |           | $-$  | $0$        | $+$        | $0$  | $-$        | $0$        | $+$       |
| $y$  | $+\infty$ |      |            |            | $-3$ |            |            | $+\infty$ |
|      |           |      | $\searrow$ | $\nearrow$ |      | $\searrow$ | $\nearrow$ |           |
|      |           |      | $-4$       |            |      | $-4$       |            |           |

Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

**a)** Điểm cực đại của hàm số là  $x = 0$ .

**b)** Giá trị cực tiểu của hàm số bằng 1.

**c)** Hàm số  $y = |f(x)|$  có 3 cực trị.

**d)** Hàm số  $y = f(|x|)$  có 5 cực trị.

**Lời giải**

|                |               |               |               |
|----------------|---------------|---------------|---------------|
| <b>a) Đúng</b> | <b>b) Sai</b> | <b>c) Sai</b> | <b>d) Sai</b> |
|----------------|---------------|---------------|---------------|

**a)** Đúng: Điểm cực đại của hàm số là  $x = 0$

**b)** Sai: Giá trị cực tiểu của hàm số bằng  $-4$

**c)** Sai: Hàm số  $y = f(x)$  có 3 cực trị và đồ thị hàm số  $y = f(x)$  cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt nên hàm số  $y = |f(x)|$  có 5 cực trị.

**d)** Sai: Vì hàm số  $y = f(x)$  là hàm trùng phương nên  $y = f(|x|) = f(x)$  có 3 cực trị

**Câu 18:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có bảng xét dấu của  $f'(x)$  như sau:

|         |           |      |     |     |     |           |
|---------|-----------|------|-----|-----|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | +         | 0    | -   | 0   | +   | -         |

Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

**a)** Hàm số đạt cực tiểu tại  $x = -1$ .

**b)** Hàm số đã cho có 3 cực trị.

**c)** Hàm số  $y = f(|x|)$  có 3 cực trị.

**d)** Hàm số  $y = f(-2x+1)$  có 5 cực trị.

**Lời giải**

|               |                |                |               |
|---------------|----------------|----------------|---------------|
| <b>a) Sai</b> | <b>b) Đúng</b> | <b>c) Đúng</b> | <b>d) Sai</b> |
|---------------|----------------|----------------|---------------|

Ta có BBT của hàm số  $y = f(x)$

|         |           |      |     |     |     |           |
|---------|-----------|------|-----|-----|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | +         | 0    | -   | 0   | +   | -         |
| $f(x)$  |           |      |     |     |     |           |

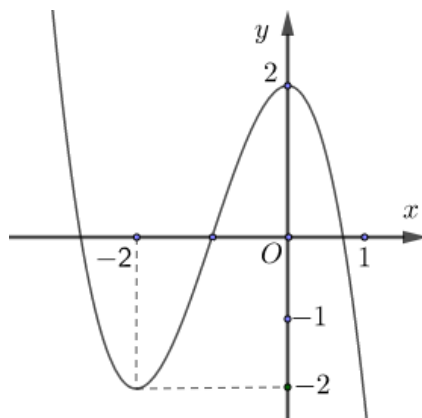
**a)** Sai: Điểm cực đại của hàm số là  $x = 0$

**b)** Đúng: Hàm số có 3 cực trị.

**c)** Đúng: Hàm số  $y = f(|x|)$  có 3 cực trị.

**d)** Sai: Vì số cực trị của hàm số  $y = f(-2x+1)$  bằng số cực trị của hàm số  $y = f(x)$

**Câu 19:** Cho hàm số bậc ba  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ.



Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

- a) Hàm số đạt cực đại tại  $x = 2$ .
- b) Hàm số đã cho có 2 cực trị.
- c) Hàm số  $y = |f(x)|$  có 5 cực trị.
- d) Hàm số  $y = f(-x^2 + x)$  có 3 cực tiểu.

**Lời giải**

|               |                |                |                |
|---------------|----------------|----------------|----------------|
| <b>a) Sai</b> | <b>b) Đúng</b> | <b>c) Đúng</b> | <b>d) Đúng</b> |
|---------------|----------------|----------------|----------------|

a) Sai: Điểm cực đại của hàm số là  $x = 0$ .

b) Đúng: Hàm số có hai cực trị.

c) Đúng: Hàm số  $y = f(x)$  có 2 cực trị và đồ thị hàm số  $y = f(x)$  cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt nên hàm số  $y = |f(x)|$  có 5 cực trị.

d) Đúng: Từ đồ thị ta có hàm số bậc ba  $y = f(x)$  có hai điểm cực trị  $x = -2; x = 0$

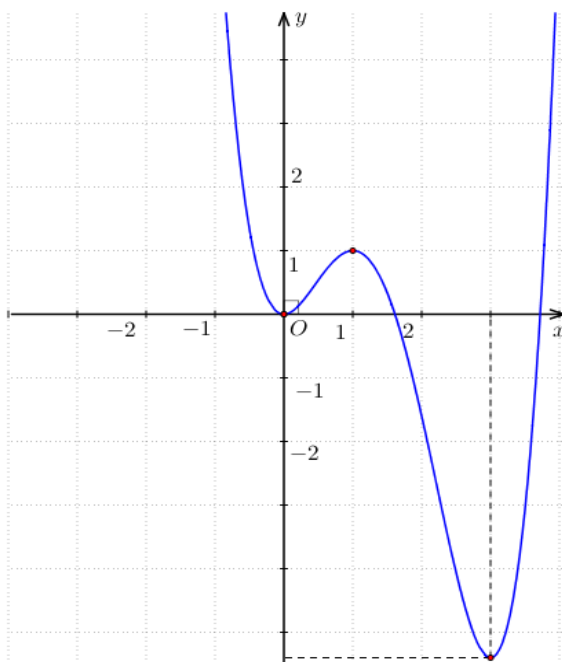
Đặt  $u = -x^2 + x$ . Ta có  $u' = -2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

Bảng biến thiên của hàm số  $y = f(-x^2 + x)$

|        |           |               |     |               |                             |            |           |            |           |
|--------|-----------|---------------|-----|---------------|-----------------------------|------------|-----------|------------|-----------|
| $x$    | $-\infty$ | $\frac{1}{2}$ |     |               |                             |            | $+\infty$ |            |           |
| $u$    | $-\infty$ | $-2$          | $0$ | $\frac{1}{4}$ | $0$                         | $-2$       | $-\infty$ |            |           |
| $f(u)$ | $+\infty$ | $\searrow$    | $2$ | $\searrow$    | $f\left(\frac{1}{4}\right)$ | $\searrow$ | $2$       | $\searrow$ | $+\infty$ |

Vậy hàm số  $y = f(-x^2 + x)$  có 3 điểm cực tiểu.

**Câu 20:** Cho hàm đa thức bậc năm  $y = f(x)$  và đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  trên  $\square$  như hình vẽ.



Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

- a) Hàm số đạt cực đại tại  $x = 3$ .
- b) Hàm số đã cho có 3 cực trị.
- c) Hàm số  $y = f(3x - 2024)$  có 2 cực trị.
- d) Hàm số  $g(x) = f(x) + 2x$  có 3 cực trị.

**Lời giải**

|               |               |                |               |
|---------------|---------------|----------------|---------------|
| <b>a) Sai</b> | <b>b) Sai</b> | <b>c) Đúng</b> | <b>d) Sai</b> |
|---------------|---------------|----------------|---------------|

Ta thấy đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 3 điểm có hoành độ lần lượt là  $0, a, b$ .

Ta có BBT của hàm số  $y = f(x)$

| $x$     | 0 |   | a |   | b |   |
|---------|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | + | 0 | - | 0 |
| $f(x)$  |   |   |   |   |   |   |

a) Sai: Điểm cực đại của hàm số là  $x = a$ .

b) Sai: Hàm số có hai cực trị

c) Đúng: Vì số cực trị của hàm số  $y = f(3x - 2024)$  bằng số cực trị của hàm số  $y = f(x)$ .

d) Sai: Ta có  $g'(x) = f'(x) + 2$

Phương trình  $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -2$  có đúng 2 nghiệm bội lẻ nên hàm số  $g(x) = f(x) + 2x$  có đúng 2 cực trị.

**Câu 21:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau

|         |           |      |      |     |           |     |      |     |           |
|---------|-----------|------|------|-----|-----------|-----|------|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-1$ | $0$  | $1$ | $+\infty$ |     |      |     |           |
| $f'(x)$ |           | $-$  | $0$  | $+$ | $0$       | $-$ | $0$  | $+$ |           |
| $f(x)$  | $+\infty$ |      | $-2$ |     | $-1$      |     | $-2$ |     | $+\infty$ |

Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

- a) Hàm số  $y = f(x)$  có 3 điểm cực trị.
- b) Giá trị cực đại của hàm số  $y = f(x)$  là  $0$ .
- c) Hàm số  $y = |f(x)|$  có 3 điểm cực tiểu.
- d) Hàm số  $g(x) = f^3(x) + 3f^2(x) + 2020$  có 7 điểm cực trị.

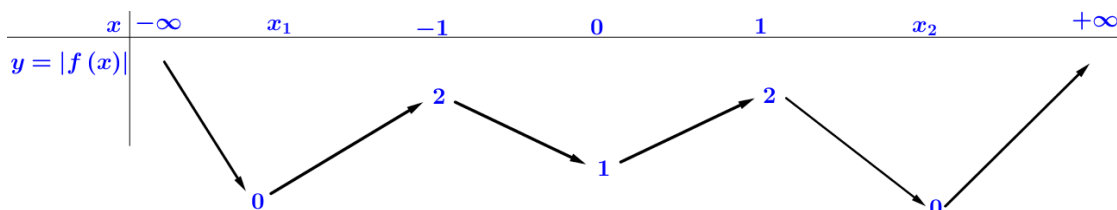
**Lời giải**

|                |               |                |               |
|----------------|---------------|----------------|---------------|
| <b>a) Đúng</b> | <b>b) Sai</b> | <b>c) Đúng</b> | <b>d) Sai</b> |
|----------------|---------------|----------------|---------------|

a) Đúng.

b) Sai. Giá trị cực đại của hàm số  $y = f(x)$  là  $-2$ .

c) Đúng. Từ BBT của hàm số  $y = f(x)$  ta suy ra được BBT của hàm số  $y = |f(x)|$



Ta thấy hàm số có 3 điểm cực tiểu.

d) Sai. Ta có  $g(x) = f^3(x) + 3f^2(x) + 2020$

$$\Rightarrow g'(x) = f'(x)[3f^2(x) + 6f(x)] = 3f'(x)f(x)[f(x) + 2]$$

$$\text{Ta có } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f(x) = 0 \text{ (1)} \\ f(x) = -2 \end{cases}$$

Dựa vào BBT của hàm số  $y = f(x)$  ta thấy

$$\text{PT: } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = \pm 1$$

$f(x) = 0$  có 2 nghiệm  $x_1; x_2$  là hai nghiệm đơn

$f(x) = -2$  có 2 nghiệm kép là  $x = \pm 1$

Vậy phương trình  $g'(x) = 0$  có 5 nghiệm đơn nên hàm số  $y = g(x)$  có 5 điểm cực trị

**Câu 22:** Cho hàm số  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  ( $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ) có bảng biến thiên như sau

|         |           |      |     |           |     |     |           |
|---------|-----------|------|-----|-----------|-----|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-2$ | $3$ | $+\infty$ |     |     |           |
| $f'(x)$ |           | $-$  | $0$ | $+$       | $0$ | $-$ |           |
| $f(x)$  | $+\infty$ |      |     |           | $4$ |     | $-\infty$ |

$\begin{array}{c} +\infty \swarrow \quad \nearrow 4 \\ \quad \quad \quad 1 \end{array}$

- Hàm số đạt cực đại tại điểm  $x = 4$ .
- Giá trị cực tiểu của hàm số là  $y = 1$ .
- Hàm số  $y = f(x)$  đồng biến trên khoảng  $(-1; 1)$ .
- Hàm số  $y = f(x)$  có 3 số dương trong các hệ số  $a, b, c, d$

**Lời giải**

|               |                |                |                |
|---------------|----------------|----------------|----------------|
| <b>a) Sai</b> | <b>b) Đúng</b> | <b>c) Đúng</b> | <b>d) Đúng</b> |
|---------------|----------------|----------------|----------------|

- Sai: Từ bảng biến thiên suy ra hàm số đạt cực đại tại điểm  $x = 3$ .
- Đúng: Từ bảng biến thiên suy ra Giá trị cực tiểu của hàm số là  $y = 1$ .
- Đúng: Hàm số  $y = f(x)$  đồng biến trên khoảng  $(-2; 3)$  suy  $(-1; 1) \subset (-2; 3)$ .
- Đúng:

Ta có:  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  ( $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ )  $\Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

Đồ thị hàm số  $f(x)$  có hai điểm cực trị  $A(-2; 1), B(3; 4)$  nên ta có hệ:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(-2) = 1 \\ f(3) = 4 \\ f'(-2) = 0 \\ f'(3) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -8a + 4b - 2c + d = 1 \\ 27a + 9b + 3c + d = 4 \\ 12a - 4b + c = 0 \\ 27a + 6b + c = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = -\frac{6}{125} \\ b = \frac{9}{125} \\ c = \frac{108}{125} \\ d = \frac{257}{125} \end{array} \right. . \text{ Trong các số } a, b, c, d \text{ có 3 số dương.}$$

**Câu 23:** Cho hàm số  $y = f(x) = x^3 - 3mx^2 + 3(2m-1)x + 1$ ,  $m$  là tham số.

- Với  $m = 0$ , hàm số có dạng  $y = x^3 - 3x + 1$ .
- Với  $m = 0$ , điểm cực đại của đồ thị hàm số là  $(-1; 2)$
- Hàm số  $y = f(x) = x^3 - 3mx^2 + 3(2m-1)x + 1$ , đạt cực đại tại  $x = 0$ , khi  $m = \frac{1}{2}$ .
- Hàm số đồng biến trên  $(-\infty; +\infty)$  khi và chỉ khi  $m = 1$ .

**Lời giải**

|                |               |                |                |
|----------------|---------------|----------------|----------------|
| <b>a) Đúng</b> | <b>b) Sai</b> | <b>c) Đúng</b> | <b>d) Đúng</b> |
|----------------|---------------|----------------|----------------|

a) Đúng: Thay  $m = 0$  vào hàm số ta được  $y = x^3 - 3x + 1$ .

b) Sai: Điểm cực đại của đồ thị hàm số là  $(-1; 3)$

c) Đúng: Ta có:  $f'(x) = 3x^2 - 6mx + 3(2m - 1)$ ,  $f''(x) = 6x - 6m$

Theo giả thiết  $x_{cd} = 0$ , suy ra  $\begin{cases} f'(0) = 0 \\ f''(0) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(2m - 1) = 0 \\ -6m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$

d) Đúng:

$$y' = 3x^2 - 6mx + 3(2m - 1)$$

$$\text{Ta có: } \Delta' = (-3m)^2 - 3.3.(2m - 1).$$

Để hàm số luôn đồng biến trên  $\mathbb{R}$  thì  $\Delta' \leq 0$

$$\Leftrightarrow 9m^2 - 18m + 9 < 0 \Leftrightarrow 9(m^2 - 2m + 1) \leq 0 \Leftrightarrow 9(m - 1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow m = 1.$$

**Câu 24:** Cho hàm số  $y = f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + (m - 1)x^2 + (m - 3)x + 2$ , trong đó  $m$  là tham số.

Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau?

a)  $y' = -x^2 + 2(m - 1)x + m - 3$ .

b) Khi  $m = 0$ , hàm số nghịch biến trên  $\mathbb{R}$ .

c) Có ít nhất một giá trị của tham số  $m$  để hàm số đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .

d) Có tất cả 3 giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số nghịch biến trên  $\mathbb{R}$ .

**Lời giải**

| a) Đúng | b) Đúng | c) Sai | d) Sai |
|---------|---------|--------|--------|
|---------|---------|--------|--------|

a) Đúng.

$$\text{Ta có: } y' = -x^2 + 2(m - 1)x + m - 3.$$

b) Đúng.

$$\text{Với } m = 0, \text{ ta có: } y = -\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 2.$$

Tập xác định:  $D = \mathbb{R}$ .

$$y' = -x^2 - 2x - 3 < 0, \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Do đó, hàm số nghịch biến trên } \mathbb{R}.$$

c) Sai.

$$\text{Để hàm số đồng biến trên } \mathbb{R} \text{ thì } y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \text{ (vô lý)}.$$

Do đó, không có giá trị của tham số  $m$  để hàm số đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .

d) Sai.

Tập xác định:  $D = \mathbb{R}$ .

$$\text{Ta có: } y' = -x^2 + 2(m - 1)x + m - 3.$$

$$\Delta' = (m - 1)^2 + m - 3 = m^2 - m - 2.$$

Hàm số nghịch biến trên  $\square$  khi  $y' \leq 0, \forall x \in \square$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 < 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2 - m - 2 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 2.$$

Các giá trị nguyên của  $m$  thỏa mãn là:  $-1; 0; 1; 2$  (4 giá trị).

**Câu 25:** Cho hàm số  $y = \frac{1}{3}mx^3 - (m-1)x^2 + 3(m-2)x + \frac{1}{3}$ . Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau?

- a) Tập xác định của hàm số là  $D = \square \setminus \{3\}$ .
- b) Hàm số có đạo hàm là  $y' = mx^2 - 2(m-1)x + 3(m-2)$ .
- c) Đồ thị hàm số đi qua điểm  $M(1;1)$  khi  $m = \frac{17}{7}$ .
- d) Với  $m \geq \frac{2}{3}$  thì hàm số đã cho đồng biến trên khoảng  $[2; +\infty)$ .

**Lời giải**

| a) Sai | b) Đúng | c) Đúng | d) Đúng |
|--------|---------|---------|---------|
|--------|---------|---------|---------|

a) Sai: Ta có  $D = \square \dots$

b) Đúng: Hàm số có đạo hàm là  $y' = mx^2 - 2(m-1)x + 3(m-2)$ .

c) Đúng: Đồ thị hàm số đã đi qua điểm  $M(1;1)$  suy ra khi

$$1 = \frac{1}{3}m - (m-1) + 3(m-2) + \frac{1}{3} \Leftrightarrow m = \frac{17}{7}$$

d) Đúng: Với  $m \geq \frac{2}{3}$  thì hàm số đã cho đồng biến trên khoảng  $[2; +\infty)$ .

Hàm số đồng biến trên  $[2; +\infty)$  khi và chỉ khi

$$y' \geq 0, \forall x \geq 2 \Leftrightarrow mx^2 - 2(m-1)x + 3(m-2) \geq 0, \forall x \geq 2$$

$$\Leftrightarrow m(x^2 - 2x + 3) + 2x - 6 \geq 0, \forall x \geq 2 \Leftrightarrow m \geq \frac{6-2x}{x^2-2x+3}, \forall x \geq 2 \text{ (do } x^2 - 2x + 3 > 0, \forall x \geq 2).$$

Bài toán trở thành:

$$\text{Tìm } m \text{ để } f(x) = \frac{6-2x}{x^2-2x+3} \leq m, \forall x \geq 2.$$

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{2x^2 - 12x + 6}{(x^2 - 2x + 3)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 12x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \pm \sqrt{6}.$$

Bảng biến thiên:

|      |               |                          |           |   |
|------|---------------|--------------------------|-----------|---|
| $x$  | 2             | $3 + \sqrt{6}$           | $+\infty$ |   |
| $y'$ |               | –                        | 0         | + |
| $y$  | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2 - \sqrt{6}}{2}$ | 0         |   |

Ta cần có:  $\max_{[2; +\infty)} f(x) \leq m \Leftrightarrow m \geq \frac{2}{3}$ . Đó là các giá trị cần tìm của tham số  $m$ .

**Câu 26:** Cho hàm số  $y = \frac{x+4}{x+m}$  với  $m$  là tham số. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

- Tập xác định của hàm số là  $\mathbb{R} \setminus \{-m\}$
- Khi  $m = 1$ , hàm số nghịch biến trên các khoảng  $(-\infty; -1)$  và  $(-1; +\infty)$
- Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định  $\Leftrightarrow m < 4$ .
- Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(6; +\infty) \Leftrightarrow -6 < m < 4$ .

**Lời giải**

|                |                |                |               |
|----------------|----------------|----------------|---------------|
| <b>a) Đúng</b> | <b>b) Đúng</b> | <b>c) Đúng</b> | <b>d) Sai</b> |
|----------------|----------------|----------------|---------------|

a) **Đúng:** Tập xác định của hàm số là  $\mathbb{R} \setminus \{-m\}$

b) **Đúng:** Khi  $m = 1$ ,  $y = \frac{x+4}{x+1} \Rightarrow y' = \frac{-3}{(x+1)^2} < 0, \forall x \neq -1$

Do đó, hàm số nghịch biến trên các khoảng  $(-\infty; -1)$  và  $(-1; +\infty)$

c) **Đúng:**  $y = \frac{x+4}{x+m} \Rightarrow y' = \frac{m-4}{(x+m)^2}$

Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định  $\Leftrightarrow m - 4 < 0 \Leftrightarrow m < 4$ .

d) **Sai:** Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(6; +\infty)$

$$\Leftrightarrow y' < 0, \forall x \in (6; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} m < 4 \\ -m \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow -6 \leq m < 4.$$

**Câu 27:** Cho hàm số  $y = \frac{mx+3m-4}{x-m}$  với  $m$  là tham số. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

- Hàm số có hai điểm cực trị
- Khi  $m = -1$ , hàm số đồng biến trên  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$
- Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định  $\Leftrightarrow -4 < m < 1$

d) Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của  $m$  để hàm số đồng biến trên khoảng  $(-\infty; -2)$ . Số phần tử của  $S$  là 3.

**Lời giải**

|               |               |                |                |
|---------------|---------------|----------------|----------------|
| <b>a) Sai</b> | <b>b) Sai</b> | <b>c) Đúng</b> | <b>d) Đúng</b> |
|---------------|---------------|----------------|----------------|

a) **Sai:** Hàm số không có cực trị

b) **Sai:** Khi  $m = -1$ ,  $y = \frac{-x-7}{x+1} \Rightarrow y' = \frac{6}{(x+1)^2} > 0, \forall x \neq -1$

Do đó, hàm số đồng biến trên các khoảng  $(-\infty; -1)$  và  $(-1; +\infty)$

c) **Đúng:**  $y' = \frac{-m^2 - 3m + 4}{(x-m)^2}$

Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định  $\Leftrightarrow -m^2 - 3m + 4 > 0 \Leftrightarrow -4 < m < 1$

d) **Đúng:** Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-\infty; -2) \Leftrightarrow y' > 0, \forall x \in (-\infty; -2)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -m^2 - 3m + 4 > 0 \\ m \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 < m < 1 \\ m \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq m < 1.$$

$S = \{-2; -1; 0\} \Rightarrow$  số phần tử của  $S$  là 3

**Câu 28:** Cho hàm số  $y = \frac{-x+1}{x+m}$  với  $m$  là tham số,  $x^1 - m$ . Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

a)  $y' = \frac{-m-1}{(x+m)^2} < 0, \forall x^1 - m$ .

b) Khi  $m = -2$ , hàm số đồng biến trên các khoảng  $(-\infty; -2)$  và  $(-2; +\infty)$

c) Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định khi  $m < -1$

d) Gọi  $S$  là tổng các giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số nghịch biến trên  $(-\infty; -3)$ . Khi đó  $S = 9$ .

**Lời giải**

|                |                |                |               |
|----------------|----------------|----------------|---------------|
| <b>a) Đúng</b> | <b>b) Đúng</b> | <b>c) Đúng</b> | <b>d) Sai</b> |
|----------------|----------------|----------------|---------------|

a) **Đúng**

$y' = \frac{-m-1}{(x+m)^2} < 0, \forall x^1 - m$ .

b) **Đúng**

Khi  $m = -2$ :  $y' = \frac{1}{(x-2)^2} > 0 \forall x \neq 2$

Hàm số đồng biến trên các khoảng  $(-\infty; 2)$  và  $(2; +\infty)$

**c) Đúng**

$y' = \frac{-m-1}{(x+m)^2} \forall x \neq -m$

Hàm số đồng biến trên từng khoảng khi  $-m-1 > 0 \Leftrightarrow m < -1$

**d) Sai**

$y' = \frac{-m-1}{(x+m)^2} \forall x \neq -m$

Hàm số nghịch biến trên  $(-\infty; -3)$  khi  $\begin{cases} -m-1 < 0 \\ -m^3 - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ m \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m \leq 3$

$S = 0 + 1 + 2 + 3 = 6$

**Câu 29:** Cho hàm số  $y = \frac{mx+4m}{x+m}$  với  $m$  là tham số,  $x \neq -m$ . Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

a) Khi  $m = -1$ , hàm số đồng biến trên các khoảng  $(-\infty; 1)$  và  $(1; +\infty)$

b) Hàm số luôn có hai đường tiệm cận.

c) Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của  $m$  để hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định. Số phần tử của  $S$  là 3

d) Gọi  $T$  là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của  $m$  để hàm số nghịch biến trên  $(5; +\infty)$ . Khi đó  $T = 32$ .

**Lời giải**

|                |               |                |               |
|----------------|---------------|----------------|---------------|
| <b>a) Đúng</b> | <b>b) Sai</b> | <b>c) Đúng</b> | <b>d) Sai</b> |
|----------------|---------------|----------------|---------------|

**a) Đúng**

Khi  $m = -1$ :  $y' = \frac{5}{(x-1)^2} > 0 \forall x \neq 1$

Hàm số đồng biến trên các khoảng  $(-\infty; 1)$  và  $(1; +\infty)$ .

**b) Sai**

Khi  $m = 0$ :  $y = 0$  thì hàm số không có đường tiệm cận.

**c) Đúng**

$y' = \frac{m^2-4m}{(x+m)^2} \forall x \neq -m$

Hàm số nghịch biến trên từng khoảng khi  $m^2 - 4m < 0 \wedge 0 < m < 4$

$$S = \{1; 2; 3\}$$

**d) Sai**

$$y' = \frac{m^2 - 4m}{(x + m)^2} \cdot x^1 - m$$

Hàm số nghịch biến trên  $(5; +\infty)$  khi  $\begin{cases} m^2 - 4m < 0 \\ -m \leq 5 \end{cases} \wedge \begin{cases} 0 < m < 4 \\ m^3 \leq 5 \end{cases} \wedge 0 < m < 4$

$$T = 1 + 2 + 3 = 6$$

**Câu 30:** Cho hàm số  $y = \frac{(m+1)x^2 - 2mx + 6m}{x-1}$ , ( $m$  là tham số). Các mệnh đề sau **đúng** hay **sai**?

**a)** Tập xác định của hàm số đã cho là  $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

**b)** Với  $m = 0$  thì hàm số có dạng  $y = \frac{x^2}{x-1}$ .

**c)** Hàm số  $y = \frac{x^2}{x-1}$  nghịch biến trên  $(1; +\infty)$ .

**d)** Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng xác định khi và chỉ khi  $m$  thuộc  $[a; b]$ . Khi đó  $a + 5b = 0$

**Lời giải**

| <b>a) Đúng</b> | <b>b) Đúng</b> | <b>c) Sai</b> | <b>d) Sai</b> |
|----------------|----------------|---------------|---------------|
|----------------|----------------|---------------|---------------|

**a)** Đúng: Tập xác định hàm số đã cho là  $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

**b)** Đúng: Với  $m = 0$  thì hàm số có dạng  $y = \frac{x^2}{x-1}$ .

**c)** Sai: Với  $m = 0$ :  $y = \frac{x^2}{x-1} \Rightarrow y' = 1 - \frac{1}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

Từ BBT của hàm số  $y = \frac{x^2}{x-1} \Rightarrow$  Hàm số nghịch biến trên  $(0; 1)$  và  $(1; 2)$

$\Rightarrow$  Hàm số không nghịch biến trên  $(1; +\infty)$

$\Rightarrow$  Mệnh đề b sai

**d)** Sai: + TXĐ:  $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

Xét hai trường hợp

**TH1:** Khi  $m = -1$ , ta có hàm số  $y = \frac{2x-6}{x-1}$  và  $y' = \frac{4}{(x-1)^2} > 0, \forall x \in D$

Do đó hàm số đồng biến trên mỗi khoảng xác định

Vậy,  $m = -1$  thỏa mãn yêu cầu bài toán

**TH2:** Khi  $m \neq -1$ , ta có  $y' = \frac{(m+1)x^2 - 2(m+1)x - 4m}{(x-1)^2}$

Đặt  $g(x) = (m+1)x^2 - 2(m+1)x - 4m$  và ta có  $y'$  cùng dấu với  $g(x)$

Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng xác định  $\Leftrightarrow y' > 0, \forall x \in D \Leftrightarrow g(x) \geq 0, \forall x \in D$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = (m+1)^2 + 4m(m+1) \leq 0 \\ m+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)(5m+1) \leq 0 \\ m > -1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m \leq -\frac{1}{5}$$

Vậy tập hợp các giá trị của tham số  $m$  thỏa mãn yêu cầu của bài toán là  $\left[-1; -\frac{1}{5}\right]$

**Câu 31:** Cho hàm số  $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 2} (C)$ . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Ta luôn có  $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 2} = x - 5 + \frac{12}{x + 2}$ .

b) Đồ thị hàm số  $(C)$  có 2 điểm cực trị.

c) Điểm  $M(0; -1)$  là giao điểm của trục tung với tiệm cận xiên của  $(C)$ .

d) Đồ thị hàm số  $(C)$  có 2 cực trị và đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị có phương trình  $y = 2x - 3$ .

**Lời giải**

| a) Đúng | b) Đúng | c) Sai | d) Đúng |
|---------|---------|--------|---------|
|---------|---------|--------|---------|

a) Đúng: Ta luôn có  $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 2} = x - 5 + \frac{12}{x + 2}$ .

b) Đúng:  $y' = \frac{x^2 + 4x - 8}{(x + 2)^2}$

Xét  $y' = 0 \Rightarrow x^2 + 4x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \pm 2\sqrt{3}$ .

Vậy đồ thị hàm số  $(C)$  có 2 điểm cực trị.

c) Sai: Khi  $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 2} = x - 5 + \frac{12}{x + 2}$

Ta có 
$$\begin{cases} y = x - 5 + \frac{12}{x+2} \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{12}{x+2} = 0 \end{cases} \Rightarrow y = x - 5 \text{ là tiệm cận xiên}$$

Giao điểm của tiệm cận xiên với trục tung là điểm  $M(0;5)$ .

**d) Đúng:**  $y' = \frac{x^2 + 4x - 8}{(x+2)^2}$

Giả sử  $M(x_0; y_0)$  là điểm cực trị của đồ thị hàm số  $(C)$ .

Đặt  $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x+2} = \frac{u(x)}{v(x)}, \begin{cases} u(x) = x^2 - 3x + 2 \\ v(x) = x + 2 \end{cases}$ .

$$\Rightarrow y_0 = \frac{u(x_0)}{v(x_0)}.$$

Mặt khác:

$$y'(x_0) = \frac{u'(x_0)v(x_0) - u(x_0)v'(x_0)}{v^2(x_0)} = 0 \Rightarrow u'(x_0)v(x_0) - u(x_0)v'(x_0) = 0$$

$$\Rightarrow y_0 = \frac{u(x_0)}{v(x_0)} = \frac{u'(x_0)}{v'(x_0)} = 2x_0 - 3$$

**Câu 32:** Cho hàm số  $y = \frac{x^2 - x + 1}{x}$  có đồ thị là  $(C)$ .

a) Đạo hàm  $y'$  của hàm số là  $y' = 1 - \frac{1}{x^2}, \forall x \neq 0$ .

b) Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng  $(-\infty; -1)$ .

c) Giá trị cực đại của hàm số đã cho lớn hơn giá trị cực tiểu của hàm số.

d) Gọi  $A, B$  là hai điểm cực trị của đồ thị  $(C)$ , diện tích tam giác  $OAB$  bằng 2.

**Lời giải**

|                |                |               |               |
|----------------|----------------|---------------|---------------|
| <b>a) Đúng</b> | <b>b) Đúng</b> | <b>c) Sai</b> | <b>d) Sai</b> |
|----------------|----------------|---------------|---------------|

**a) Đúng.**

$$y = x - 1 + \frac{1}{x} \Rightarrow y' = 1 - \frac{1}{x^2}, \forall x \neq 0.$$

**b) Đúng.**

Ta có  $y' = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}, \forall x \neq 0.$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Bảng biến thiên :

|      |           |      |           |     |           |     |
|------|-----------|------|-----------|-----|-----------|-----|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$ | $0$       | $1$ | $+\infty$ |     |
| $y'$ |           | $+$  | $0$       | $-$ | $0$       | $+$ |
| $y$  | $-\infty$ | $-3$ | $+\infty$ | $1$ | $+\infty$ |     |

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số đã cho đồng biến trên khoảng  $(-\infty; -1)$ .

c) Sai.

$$\text{Ta có } y' = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}, \forall x \neq 0.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên :

|      |           |      |           |     |           |     |
|------|-----------|------|-----------|-----|-----------|-----|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$ | $0$       | $1$ | $+\infty$ |     |
| $y'$ |           | $+$  | $0$       | $-$ | $0$       | $+$ |
| $y$  | $-\infty$ | $-3$ | $+\infty$ | $1$ | $+\infty$ |     |

Từ bảng biến thiên ta có  $y_{CB} = -3 < y_{CT} = 1$ .

d) Sai.

Toạ độ hai điểm cực trị là  $A(-1; -3), B(1; 1)$ .

$$OA = \sqrt{10}, OB = \sqrt{2}, AB = 2\sqrt{5}.$$

Đặt  $p = \frac{OA + OB + AB}{2}$ , áp dụng công thức Hê-rông ta có :

$$S = \sqrt{p(p - OA)(p - OB)(p - AB)} = 1.$$

**Chú ý:** HS có thể tính diện tích tam giác OAB theo các cách khác đã học.

**Câu 33:** Cho hàm số  $y = f(x) = \frac{x^2 + x + 2}{x - 1}$  có đồ thị là  $(C)$ .

a) Tập xác định của hàm số là  $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

b) Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng  $(1;4)$ .

c) Hai điểm cực trị của đồ thị  $(C)$  đối xứng nhau qua điểm  $I(1;3)$ .

d) Hàm số  $g(x) = f(f'(x))$  có 2 điểm cực đại và 1 điểm cực tiểu.

**Lời giải**

| a) Đúng | b) Sai | c) Đúng | d) Sai |
|---------|--------|---------|--------|
|---------|--------|---------|--------|

a) **Đúng.** Tập xác định của hàm số là  $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

b) **Sai.**

$$y' = f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}, \forall x \neq 1.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên :

| $x$  | $-\infty$ | $-1$ | $1$       | $3$ | $+\infty$ |
|------|-----------|------|-----------|-----|-----------|
| $y'$ | +         | 0    | -         | 0   | +         |
| $y$  | $-\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $7$ | $+\infty$ |

Từ bảng biến thiên suy ra khẳng định b) sai.

c) **Đúng.**

Hai điểm cực trị của đồ thị  $(C)$  đối xứng nhau qua điểm  $I(1;3)$ .

Hai điểm cực trị của  $(C)$  là  $A(-1;-1), B(3;7)$ .

Vì  $\begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$  nên suy ra khẳng định c) đúng.

d) **Sai**

Ta có  $f(x) = x + 2 + \frac{4}{x-1} \Rightarrow f'(x) = 1 - \frac{4}{(x-1)^2}, f''(x) = \frac{8}{(x-1)^3}, \forall x \neq 1.$

$$g'(x) = [f(f'(x))]' = f''(x) \cdot f'(f'(x)).$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f''(x) = 0 \text{ (ptn)} \\ f'(f'(x)) = 0 \end{cases}$$

$$f'(f'(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = -1 \\ f'(x) = 3 \text{ (ptn)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{(x-1)^2} = 2 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = -\sqrt{2} \\ x-1 = \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1-\sqrt{2} \\ x = 1+\sqrt{2} \end{cases}$$

|         |           |              |     |              |           |
|---------|-----------|--------------|-----|--------------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $1-\sqrt{2}$ | $0$ | $1+\sqrt{2}$ | $+\infty$ |
| $g'(x)$ | $+$       | $0$          | $-$ | $+$          | $0$       |

Từ bảng xét dấu  $g'(x)$  suy ra hàm số  $g(x)$  có 2 điểm cực đại và không có cực tiểu.

**Câu 34:** Cho hàm số  $y = \frac{x^2 + mx + m}{x + m}$ . Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

- a) Với  $m = 1$  đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm  $A(0;1)$
- b) Với  $m = 1$  hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-2;0)$
- c) Với  $m = 1$  đồ thị hàm số nhận  $x = -2; x = 0$  làm hai điểm cực trị
- d) Có hai giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số đạt cực đại tại  $x = 2$

**Lời giải**

|                |                |               |               |
|----------------|----------------|---------------|---------------|
| <b>a) Đúng</b> | <b>b) Đúng</b> | <b>c) Sai</b> | <b>d) Sai</b> |
|----------------|----------------|---------------|---------------|

TXĐ:  $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$ .

Với  $m = 1$  ta được hàm số  $y = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$

Ta có  $y' = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$

Ta có bảng biến thiên như sau

- a) Đúng: Khi  $x = 0 \Rightarrow y = 1$  vậy đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm  $A(0;1)$
- b) Đúng: Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số nghịch biến trên  $(-2;0)$
- c) Sai: Từ bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số nhận điểm  $A(0;1)$  và điểm  $B(-2;3)$  làm hai điểm cực trị

d) Sai: Đạo hàm.  $y' = \frac{mx^2 + 2mx + m^2 - 1}{(x-m)^2}$

Hàm số đạt cực đại tại  $x = 2$  nên  $y'(2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = -3 \end{cases}$

Thử lại với  $m = -1$  thì hàm số đạt cực tiểu tại  $x = 2$ : không thỏa mãn.

Thử lại với  $m = -3$  thì hàm số đạt cực đại tại  $x = 2$ : thỏa mãn.

Vậy chỉ có 1 giá trị nguyên âm của tham số  $m$  thỏa mãn yêu cầu bài toán

**Câu 35:** Cho hàm số  $y = \frac{x^2 + mx - 1}{x - 1}$  xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

- a) Với  $m = 1$  đồ thị hàm số nhận đường thẳng  $x = 1$  làm tiệm cận đứng
- b) Với  $m = 1$  hàm số đồng biến trên khoảng  $(-\infty, 1)$
- c) Với  $m = 1$  hàm số nhận  $x = 0; x = 2$  làm hai điểm cực trị
- d) Có 2024 giá trị nguyên dương của tham số  $m \in (-2024; 2024)$  để hàm số có cực đại và cực tiểu

**Lời giải**

|                |                |               |               |
|----------------|----------------|---------------|---------------|
| <b>a) Đúng</b> | <b>b) Đúng</b> | <b>c) Sai</b> | <b>d) Sai</b> |
|----------------|----------------|---------------|---------------|

Tập xác định:  $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$\text{Với } m = 1 \text{ Ta có } y = \frac{x^2 + x - 1}{x - 1} \Rightarrow y' = \frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên sau:

Từ bảng biến thiên ta thấy

- a) đúng
- b) đúng
- c) sai
- d) sai vì

$$\text{Đạo hàm: } y' = \frac{x^2 - 2x - m + 1}{(x - 1)^2}. \text{ Đặt } f(x) = x^2 - 2x - m + 1$$

$$\text{Đề hàm số có cực đại và cực tiểu khi: } \begin{cases} \Delta'_{f(x)} > 0 \\ f(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 0$$

$m \in \mathbb{N} \Rightarrow m = 1, 2, \dots, 2023$  vậy có 2023 giá trị nguyên thỏa mãn

**Câu 36:** Cho hàm số  $y = x^4 - 2mx^2 + m$ , với  $m$  là tham số. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

- a) Khi  $m = 1$  thì hàm số là  $y = x^4 - 2x^2 + 1$ .
- b) ] Khi  $m = 1$  thì hàm số có  $y' = 4x^3 - 4$ .
- c) Khi  $m = 1$  thì hàm số có 3 cực trị.
- d) Đồ thị của hàm số cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt khi  $m > 1$ .

**Lời giải**

|                |               |                |                |
|----------------|---------------|----------------|----------------|
| <b>a) Đúng</b> | <b>b) Sai</b> | <b>c) Đúng</b> | <b>d) Đúng</b> |
|----------------|---------------|----------------|----------------|

a) Đúng.

b) **Sai:** Vì  $y' = 4x^3 - 4x$

c) **Đúng:** Vì khi  $m = 1$  thì  $y = x^4 - 2x^2 + 1 \Rightarrow y' = 4x^3 - 4x$

Cho  $y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$ . Do đó hàm số có 3 cực trị.

d) **Đúng:** Xét phương trình  $x^4 - 2mx^2 + m = 0$ .

Đặt  $t = x^2, (t \geq 0)$  phương trình trở thành  $t^2 - 2mt + m = 0$ .

Yêu cầu bài toán tương đương với phương trình có hai nghiệm dương phân biệt.

Điều này tương đương với  $\begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m > 0 \\ 2m > 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m > 1 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1$ .

**Câu 37:** Cho hàm số  $y = x^4 - (m-1)x^2 + m - 2$ , với  $m$  là tham số. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

a) Hàm số  $y = f(x)$  có tập xác định là  $\mathbb{R}$ .

b) Khi  $m = 0$  hàm số  $y = f(x)$  có ba cực trị.

c) Khi  $m = 0$  hàm số  $y = f(x)$  đồng biến trên  $(-\infty; 0)$ .

d) Để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt thì  $m \in (2; +\infty) \setminus \{3\}$

**Lời giải**

|                |               |               |                |
|----------------|---------------|---------------|----------------|
| <b>a) Đúng</b> | <b>b) Sai</b> | <b>c) Sai</b> | <b>d) Đúng</b> |
|----------------|---------------|---------------|----------------|

a) **Đúng.**

b) **Sai:** Khi  $m = 0 \Rightarrow f(x) = x^4 + x^2 - 2 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 + 2x$

Cho  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 + 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ . Do đó hàm số có 1 cực trị.

c) **Sai:** Khi  $m = 0 \Rightarrow f(x) = x^4 + x^2 - 2 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 + 2x$ .

Hàm số  $y = f(x)$  đồng biến khi  $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$ .

d) **Đúng:**

Xét phương trình hoành độ giao điểm:  $x^4 - (m-1)x^2 + m - 2 = 0$  (1)

Đặt  $x^2 = t (t \geq 0)$

Phương trình trở thành  $t^2 - (m-1)t + m - 2 = 0$  (2)

Yêu cầu bài toán trở thành tìm  $m$  để pt có 2 nghiệm dương phân biệt.

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ S = t_1 + t_2 > 0 \\ P = t_1 t_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-3)^2 > 0 \\ m-1 > 0 \\ m-2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in (2; +\infty) \setminus \{3\}$$

**Câu 38:** Cho hàm số  $y = f(x) = x^4 - 2(m-1)x^2 + m - 2$  với  $m$  là tham số thực. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

- Hàm số  $y = f(x)$  là hàm số bậc bốn.
- $f'(x) = 4x^3 - 2(m-1)x$ .
- Khi  $m = 0$  là hàm số  $y = f(x)$  nghịch biến trên khoảng  $(-2; 0)$ .
- Hàm số  $y = f(x)$  đồng biến trên khoảng  $(1; 3)$  khi và chỉ khi  $m \in (-\infty; 2)$

**Lời giải**

| a) Đúng | b) Sai | c) Đúng | d) Sai |
|---------|--------|---------|--------|
|---------|--------|---------|--------|

a) **Đúng:**  $y = f(x) = x^4 - 2(m-1)x^2 + m - 2$  là hàm số bậc 4.

b) **Sai:** Vì  $f'(x) = 4x^3 - 4(m-1)x$ .

c) **Đúng:** Khi  $m = 0$  thì  $f(x) = x^4 + 2x^2 - 2 \Rightarrow f'(x) = 4x(x^2 + 1)$ .

Hàm số  $y = f(x)$  nghịch biến khi  $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 + 1) < 0 \Leftrightarrow x < 0$ .

d) **Sai:** Ta có  $f'(x) = 4x^3 - 4(m-1)x = 4x(x^2 - m + 1)$ .

Hàm số đồng biến trên khoảng  $(1; 3) \Leftrightarrow f'(x) \geq 0, \forall x \in (1; 3)$

$$\Leftrightarrow 4x(x^2 - m + 1) \geq 0, \forall x \in (1; 3) \Leftrightarrow m \leq x^2 + 1, \forall x \in (1; 3) \Leftrightarrow m \leq 2.$$

**Câu 39:** Cho hàm số  $y = f(x) = mx^4 + 2x^2 - 1$  với  $m$  là tham số thực. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

- Hàm số  $y = f(x)$  là hàm số bậc bốn.
- Khi  $m = 0$  hàm số  $y = f(x)$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .
- Khi  $m = 1$  hàm số  $y = f(x)$  đồng biến trên  $(0; +\infty)$ .
- Hàm số  $y = f(x)$  đồng biến trên khoảng  $\left(0; \frac{1}{2}\right)$  khi và chỉ khi  $m \in [-4; +\infty)$

**Lời giải**

| a) Sai | b) Sai | c) Đúng | d) Đúng |
|--------|--------|---------|---------|
|--------|--------|---------|---------|

a) **Sai:** Vì khi  $m = 0 \Rightarrow f(x) = 2x^2 - 1$  là hàm số  $y = f(x)$  là hàm số bậc hai.

b) **Sai:** Khi  $m = 0 \Rightarrow f(x) = 2x^2 - 1 \Rightarrow f'(x) = 4x$ .

Hàm số  $y = f(x)$  đồng biến khi  $f'(x) > 0 \Rightarrow x > 0$ .

c) **Đúng:** Khi  $m = 1 \Rightarrow f(x) = x^4 + 2x^2 - 1 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 + 4x = 4x(x^2 + 1)$ .

Hàm số  $y = f(x)$  đồng biến khi  $f'(x) > 0 \Rightarrow 4x(x^2 + 1) > 0 \Leftrightarrow x > 0$ .

d) **Đúng:** Ta có  $f'(x) = 4mx^3 + 4x = 4x(mx^2 + 1)$ .

Hàm số  $y = f(x)$  đồng biến trên khoảng  $\left(0; \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow f'(x) \geq 0, \forall x \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$   
 $\Leftrightarrow 4x(mx^2 + 1) \geq 0, \forall x \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow m \geq -\frac{1}{x^2}, \forall x \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow m \geq -4.$

**Câu 40:** Cho hàm số  $y = -x^4 + 2mx^2 + 2$ , với  $m$  là tham số. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

- a) Khi  $m = 0$  thì hàm số là  $y = -x^4 + 2$ .
- b) Hàm số có  $y' = -4x^3 + 2mx$ .
- c) Khi  $m = 1$  thì hàm số có 3 cực trị.
- d) Đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông khi và chỉ khi  $m = 1$

**Lời giải**

|                |               |                |                |
|----------------|---------------|----------------|----------------|
| <b>a) Đúng</b> | <b>b) Sai</b> | <b>c) Đúng</b> | <b>d) Đúng</b> |
|----------------|---------------|----------------|----------------|

a) **Đúng.**

b) **Sai:** Vì  $y' = -4x^3 + 4mx$

c) **Đúng:** Vì khi  $m = 1$  thì  $y = -x^4 + 2x^2 + 2 \Rightarrow y' = -4x^3 + 4x$

Cho  $y' = 0 \Leftrightarrow -4x^3 + 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$ . Do đó hàm số có 3 cực trị.

d) **Đúng:**  $y' = -4x^3 + 4mx = -4x(x^2 - m)$ .

Hàm số có ba cực trị  $\Leftrightarrow y' = 0$  có ba nghiệm phân biệt  $\Leftrightarrow m > 0$ .

Gọi  $A(0; 2)$ ,  $B(-\sqrt{m}, m^2 + 2)$ ,  $C(\sqrt{m}, m^2 + 2)$  là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số.

Vì  $\triangle ABC$  cân tại  $A$  nên  $\triangle ABC$  chỉ có thể vuông tại  $A \Leftrightarrow \overline{AB} \cdot \overline{AC} = 0$ .

Với  $\overline{AB} = (-\sqrt{m}; m^2)$ ,  $\overline{AC} = (\sqrt{m}; m^2) \Rightarrow -m + m^4 = 0 \Leftrightarrow m(m^3 - 1) = 0 \Leftrightarrow m = 1$  (do  $m > 0$ ).

**Câu 41:** Cho hàm số  $f(x) = x^4 - 2mx^2 + 1$ , với  $m$  là tham số. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

- a) Hàm số  $y = f(x)$  có tập xác định là  $\mathbb{R}$ .
- b) Khi  $m = 0$  hàm số  $y = f(x)$  có một cực trị.
- c) Khi  $m = 0$  hàm số  $y = f(x)$  đồng biến trên  $(-\infty; 0)$ .
- d) Tổng tất cả các giá trị nguyên dương của tham số  $m$  để hàm số đồng biến trên khoảng  $(3; +\infty)$  là 45.

**Lời giải**

|                |                |               |                |
|----------------|----------------|---------------|----------------|
| <b>a) Đúng</b> | <b>b) Đúng</b> | <b>c) Sai</b> | <b>d) Đúng</b> |
|----------------|----------------|---------------|----------------|

a) **Đúng.**

b) **Đúng:** Khi  $m = 0 \Rightarrow f(x) = x^4 + 1 \Rightarrow f'(x) = 4x^3$

Cho  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ . Do đó hàm số có 1 cực trị.

c) **Sai:** Khi  $m = 0 \Rightarrow f(x) = x^4 + 1 \Rightarrow f'(x) = 4x^3$ .

Hàm số  $y = f(x)$  đồng biến khi  $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x^3 > 0 \Leftrightarrow x > 0$ .

d) **Đúng:** Ta có  $y' = 4x^3 - 4mx = 4x(x^2 - m)$

Theo đề  $m > 0$  nên  $y' = 0$  có 3 nghiệm phân biệt  $x = -\sqrt{m}, x = 0, x = \sqrt{m}$ .

|    |           |             |   |   |   |            |           |
|----|-----------|-------------|---|---|---|------------|-----------|
| x  | $-\infty$ | $-\sqrt{m}$ |   | 0 |   | $\sqrt{m}$ | $+\infty$ |
| y' | -         | 0           | + | 0 | - | 0          | +         |

Để hàm số đồng biến trên khoảng  $(3; +\infty)$  thì  $y' \geq 0, \forall x \in (3; +\infty) \Leftrightarrow \sqrt{m} \leq 3 \Leftrightarrow m \leq 9$

Vì  $m$  nguyên dương nên  $m \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Vậy tổng tất cả giá trị của  $m$  bằng 45.

**Câu 42:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = (x^2 - 1)(x - 4)$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$  ?

a) Hàm số có 3 điểm cực trị.

b) Hàm số đồng biến trong khoảng  $(-1; 1)$ .

c) Tiếp tuyến của đồ thị hàm số luôn có hệ số góc dương khi hoành độ tiếp điểm lớn hơn 1.

d) Hàm số  $g(x) = f(3 - x)$  đạt cực đại tại  $x = 1$ .

**Lời giải**

|                |                |               |               |
|----------------|----------------|---------------|---------------|
| <b>a) Đúng</b> | <b>b) Đúng</b> | <b>c) Sai</b> | <b>d) Sai</b> |
|----------------|----------------|---------------|---------------|

a) Đúng:

Theo đề ta có:  $f'(x) = (x^2 - 1)(x - 4)$ .

$$\text{Ta có: } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 4 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên

|         |           |     |      |     |     |     |     |     |           |
|---------|-----------|-----|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ |     | $-1$ |     | $1$ |     | $4$ |     | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | $-$ | $0$  | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |           |
| $f(x)$  | $+\infty$ |     |      |     |     |     |     |     | $+\infty$ |

Dựa vào bảng biến thiên ta có:

Hàm số có 3 điểm cực trị.

b) Đúng:

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số đồng biến trên khoảng  $(-1; 1)$ .

c) Sai:

Gọi  $M(x; y)$  là điểm thuộc đồ thị hàm số  $(C): y = f(x)$ .

Khi đó tiếp tuyến của đồ thị  $(C)$  tại điểm  $M$  có hệ số góc là:  $k = f'(x)$ .

Dựa vào bảng biến thiên, ta có: 
$$\begin{cases} k = f'(x) < 0; \forall x \in (1; 4) \\ k = f'(x) > 0; \forall x \in (4; +\infty). \\ k = 0 \Leftrightarrow x = 4 \end{cases}$$

d) Sai:

Theo đề ta có:  $f'(x) = (x^2 - 1)(x - 4)$ .

Ta có:  $g(x) = f(3 - x) \Rightarrow g'(x) = -f'(3 - x) = -((3 - x)^2 - 1)((3 - x) - 4)$ .

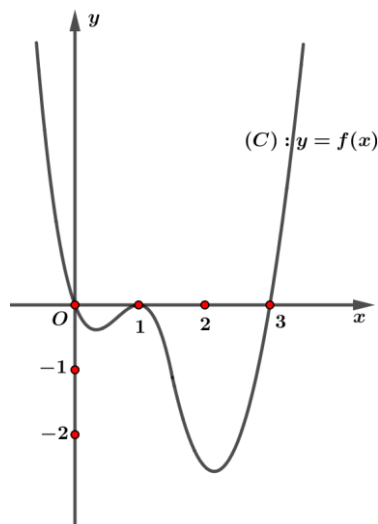
$\Rightarrow g'(x) = (x^2 - 6x + 8)(x + 1)$ .

Ta có:  $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = 0 \\ x^2 - 6x + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \\ x = 4 \end{cases}$ .

|         |           |      |     |     |           |
|---------|-----------|------|-----|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-1$ | $2$ | $4$ | $+\infty$ |
| $g'(x)$ | $-$       | $0$  | $+$ | $0$ | $-$       |
| $g(x)$  | $+\infty$ |      |     |     | $+\infty$ |

Dựa vào bảng biến thiên, ta có: hàm số  $y = g(x)$  đạt cực đại tại  $x = 2$ .

**Câu 43:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x)$  trên khoảng  $(-\infty; +\infty)$ . Biết đồ thị  $(C)$  của hàm số  $y = f(x)$  như hình vẽ dưới đây.



- Điểm cực đại của đồ thị  $(C)$  là  $x = 1$ .
- Hàm số  $y = f(x)$  đồng biến trong khoảng  $(2; +\infty)$ .
- Đồ thị  $(C') : y = f'(x)$  luôn cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.
- Đồ thị của hàm số  $y = [f(x)]^2$  có bao ba điểm cực tiểu?

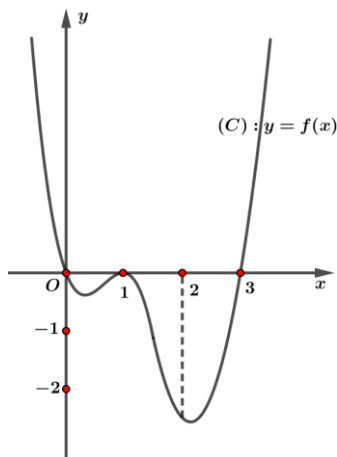
**Lời giải**

|        |        |         |         |
|--------|--------|---------|---------|
| a) Sai | b) Sai | c) Đúng | d) Đúng |
|--------|--------|---------|---------|

a) Sai:

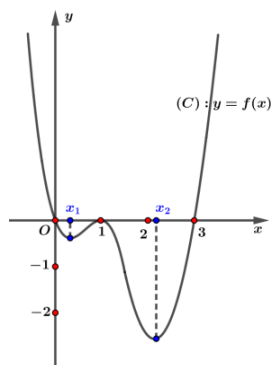
Dựa vào đồ thị, ta thấy đồ thị (C) của hàm số  $y = f(x)$  đạt cực đại tại điểm  $M(1;0)$ .

b) Sai:



Dựa vào đồ thị (C), ta thấy hàm số  $y = f(x)$  vừa nghịch biến và đồng biến trong khoảng  $(2; +\infty)$ .

c) đúng:



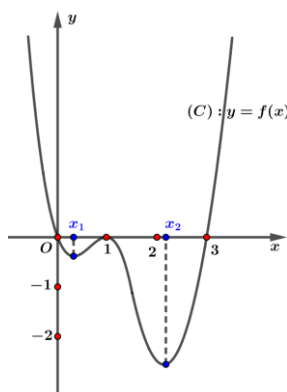
Dựa vào đồ thị ta có:

Hàm số  $y = f(x)$  đạt cực trị tại  $x = x_1, x = 1, x = x_2$ .

Như vậy phương trình  $f'(x) = 0$  có ba nghiệm phân biệt là  $x = x_1, x = 1, x = x_2$ .

Tức là đồ thị  $(C'): y = f'(x)$  cắt trục  $Ox$  tại 3 điểm phân biệt có hoành độ  $x = x_1, x = 1, x = x_2$ .

d) đúng:



Theo câu trên, từ đồ thị hàm số ta thấy hàm số đạt cực đại tại  $x = 1$ , đạt cực tiểu tại  $x_1; x_2$  từ đó ta thấy hàm số  $y = (f(x))^2$ .

$$\Rightarrow y' = 2f(x) \cdot f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f'(x) = 0 \end{cases}$$

Quan sát đồ thị ta có  $f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \text{ (kép)} \\ x = 3 \end{cases}$  và  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ x = 1 \\ x = x_2 \end{cases}$  với  $x_1 \in (0; 1)$  và

$$x_2 \in (2; 3).$$

Xét hàm số  $y = (f(x))^2$ , ta có:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = +\infty$ .

Từ đó ta lập được bảng biến thiên của hàm số  $y = (f(x))^2$ :

|         |           |            |            |       |            |            |           |            |            |           |
|---------|-----------|------------|------------|-------|------------|------------|-----------|------------|------------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | 0          | $x_1$      | 1     | $x_2$      | 3          | $+\infty$ |            |            |           |
| $y'(x)$ |           | -          | 0          | +     | 0          | -          | 0         | +          |            |           |
| $y$     | $+\infty$ | $\searrow$ | $\nearrow$ | $y_1$ | $\searrow$ | $\nearrow$ | $y_2$     | $\searrow$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Suy ra hàm số có 2 điểm cực đại, 3 điểm cực tiểu.

**Câu 44:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

|      |           |      |     |     |           |     |
|------|-----------|------|-----|-----|-----------|-----|
| $x$  | $-\infty$ | $-2$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |     |
| $y'$ |           | $-$  | $0$ | $+$ | $0$       | $-$ |
| $y$  | $+\infty$ |      |     |     |           |     |

$\searrow$

$-1$

$\nearrow$

$2$

$\nearrow$

$2$

$\searrow$

$-\infty$

a) Hàm số  $f(x)$  đạt cực tiểu tại  $x = -2$ .

b) Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số  $y = f(x)$  là  $(-2; -1)$ .

c) Đường thẳng  $y = x + 1$  đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho.

d) Hàm số  $y = g(x) = f(2x - 3)$  đạt cực tiểu tại điểm  $x = \frac{5}{2}$ .

**Lời giải**

|                |                |                |                |
|----------------|----------------|----------------|----------------|
| <b>a) Đúng</b> | <b>b) Đúng</b> | <b>c) Đúng</b> | <b>d) Đúng</b> |
|----------------|----------------|----------------|----------------|

a) Đúng: Dựa vào bảng biến thiên, Dấu  $f'(x)$  đổi từ âm sang dương khi qua điểm  $x = -2$  nên hàm số  $f(x)$  đạt cực tiểu tại điểm  $x = -2$ .

b) Đúng: Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số  $y = f(x)$  là  $(-2; -1)$ .

c) Đúng. Tọa độ điểm cực trị  $A(-2; -1); B(1; 2)$

Đường thẳng đi qua A, B nhận  $\overline{AB} = (3; 3)$  làm vtcp nên ta có pt:  $3(x-1) - 3(y-2) = 0$

$$\Rightarrow x - y + 1 = 0 \Rightarrow y = x + 1.$$

d) Đúng. Ta có:  $g'(x) = 2f'(2x - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \\ 2x - 3 = 2 \Rightarrow x = \frac{5}{2} \end{cases}$

BBT

|      |           |               |               |           |   |   |  |
|------|-----------|---------------|---------------|-----------|---|---|--|
| $x$  | $-\infty$ | $\frac{3}{2}$ | $\frac{5}{2}$ | $+\infty$ |   |   |  |
| $y'$ |           | +             | 0             | -         | 0 | + |  |

Vậy: Hàm số  $y = g(x) = f(2x - 3)$  đạt cực tiểu tại điểm  $x = \frac{5}{2}$ .

**Câu 45:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau

|      |           |            |     |     |            |            |  |           |
|------|-----------|------------|-----|-----|------------|------------|--|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $0$        |     |     | $2$        |            |  | $+\infty$ |
| $y'$ |           | $-$        | $0$ | $+$ | $0$        | $-$        |  |           |
| $y$  | $+\infty$ | $\searrow$ |     |     | $\nearrow$ | $\searrow$ |  | $-\infty$ |
|      |           | $1$        |     |     | $5$        |            |  |           |

- a) Hàm số  $f(x)$  đạt cực tiểu tại  $x = 0$ .
- b) Hàm số có hai cực trị
- c) Khoảng cách giữa hai điểm cực trị là 3.
- d) Đường thẳng  $y = 2x + 1$  đi qua hai điểm cực trị.

**Lời giải**

|                |                |               |                |
|----------------|----------------|---------------|----------------|
| <b>a) Đúng</b> | <b>b) Đúng</b> | <b>c) Sai</b> | <b>d) Đúng</b> |
|----------------|----------------|---------------|----------------|

a) Đúng: Dựa vào bảng biến thiên nên  $f(x)$  đạt cực tiểu tại  $x = 0$ .

b) Đúng: Quan sát bảng biến thiên, dấu  $f'(x)$  đổi từ dương sang âm khi qua điểm  $x = 2$  nên hàm số  $f(x)$  đạt cực đại tại điểm  $x = 2$ .

Dấu  $f'(x)$  đổi từ âm sang dương khi qua điểm  $x = 0$  nên hàm số  $f(x)$  đạt cực tiểu tại điểm  $x = 0$ . Nên hàm số có hai cực trị.

c) Sai: Có  $A(0, 1); B(2, 5)$  nên  $\overline{AB}(2; 4) \Rightarrow AB = 2\sqrt{5}$ .

d) Đúng: Tọa độ điểm cực trị  $A(-2; -1); B(1; 2)$

Đường thẳng đi qua A, B nhận  $\overline{AB} = (2; 4)$  làm vtcp nên ta có pt:  $2(x - 0) - 1(y - 1) = 0$   
 $\Rightarrow 2x - y + 1 = 0 \Rightarrow y = 2x + 1$ .

**Câu 46:** Cho hàm số  $y = |x + 1|(x - 2)$ . Khi đó:

a) Hàm số có 2 điểm cực trị

b) Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; -1)$

c) Hàm số đồng biến trên các khoảng  $(-\infty; -1)$  và  $(\frac{1}{2}; +\infty)$

d) Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(\frac{1}{2}; 1)$  và  $(1; +\infty)$

**Lời giải**

| a) Đúng | b) Sai | c) Đúng | d) Sai |
|---------|--------|---------|--------|
|---------|--------|---------|--------|

Ta có  $y' = \begin{cases} 2x - 1 \\ -2x + 1 \end{cases}$  khi  $x^3 - 1$  khi  $x < -1$ ;  $y' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

|      |           |      |               |           |
|------|-----------|------|---------------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$ | $\frac{1}{2}$ | $+\infty$ |
| $y'$ | +         |      | -             | +         |
| $y$  |           | ↗    | ↘             | ↗         |

Nhìn bảng biến thiên ta thấy

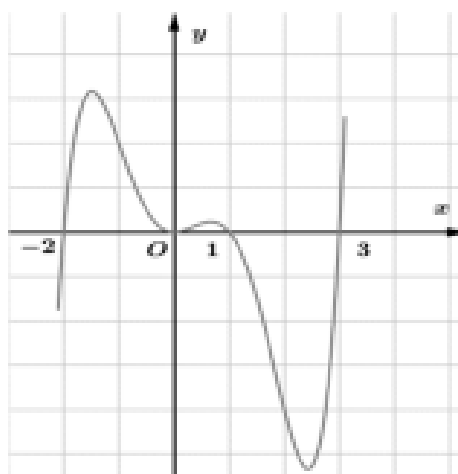
a) Đúng

b) Sai

c) Đúng

d) Sai

**Câu 47:** Cho hàm số  $y = f(x)$ . Đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  như hình bên



Khi đó:

a) Hàm số  $y = f(x)$  có 4 điểm cực trị

**b)** Hàm số  $y = f(x)$  đồng biến trên khoảng  $(-\infty; -2)$

**c)** Hàm số  $y = f(x^2)$  đồng biến trên khoảng  $(\sqrt{3}; +\infty)$

**d)** Hàm số  $y = f(x^2)$  có 5 điểm cực trị

**Lời giải**

| a) Sai | b) Sai | c) Đúng | d) Đúng |
|--------|--------|---------|---------|
|--------|--------|---------|---------|

Từ đồ thị  $y = f'(x)$  ta có  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \\ x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ -2 < x < 1 \end{cases}; f'(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \\ 1 < x < 3 \end{cases}$

Ta có  $g'(x) = 2x \cdot f'(x^2); g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 1 \\ x^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm \sqrt{3} \end{cases}$

Ta có  $f'(x^2) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 < 1 \\ x^2 > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 1 \\ x < -\sqrt{3} \\ x > \sqrt{3} \end{cases}$

Ta có bảng biến thiên:

| $x$       | $-\infty$ | $-\sqrt{3}$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $\sqrt{3}$ | $+\infty$ |
|-----------|-----------|-------------|------|-----|-----|------------|-----------|
| $2x$      | -         | -           | -    | 0   | +   | +          | +         |
| $f'(x^2)$ | +         | 0           | -    | 0   | +   | 0          | -         |
| $g'(x)$   | -         | 0           | +    | 0   | -   | 0          | +         |
| $g(x)$    |           |             |      |     |     |            |           |

Từ bảng biến thiên ta có hàm số  $g(x) = f(x^2)$  có 5 điểm cực trị.

Vậy

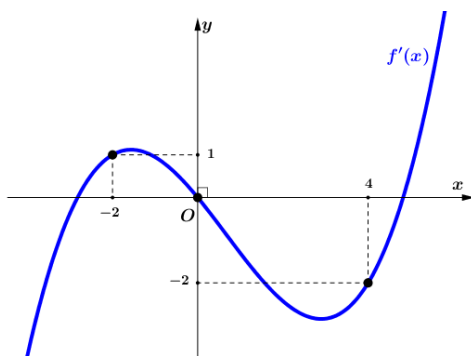
**a)** Sai

**b)** Sai

**c)** Đúng

d) Đúng

**Câu 48:** Cho hàm số bậc bốn  $y = f(x)$  có đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ bên.



Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

- a) Hàm số  $y = f(x)$  có hai điểm cực trị.
- b) Hàm số  $y = f(x)$  đạt cực đại tại  $x = 0$ .
- c) Hàm số  $h(x) = 5f(|2 - x|) + 2024$  có 5 điểm cực trị.
- d) Hàm số  $g(x) = 4f(x^2 - 4) + x^4 - 8x^2$  có 4 điểm cực tiểu.

**Lời giải**

|               |                |               |                |
|---------------|----------------|---------------|----------------|
| <b>a) Sai</b> | <b>b) Đúng</b> | <b>c) Sai</b> | <b>d) Đúng</b> |
|---------------|----------------|---------------|----------------|

a) Sai. Ta thấy đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt nên hàm số  $y = f(x)$  có 3 điểm cực trị.

b) Đúng. Ta có:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ x = 0 \\ x = x_2 \end{cases}$$

BBT:

|         |           |       |     |       |           |
|---------|-----------|-------|-----|-------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $x_1$ | $0$ | $x_2$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | $-$       | $0$   | $+$ | $0$   | $+$       |

Vậy hàm số  $y = f(x)$  đạt cực đại tại  $x = 0$

c) Sai. Số điểm cực trị của hàm số  $h(x) = 5f(|2 - x|) + 2024$  bằng số điểm cực trị của hàm số  $y = f(|x|)$ . Mà  $f(x)$  có một điểm cực trị dương nên  $y = f(|x|)$  có 3 điểm cực trị.

d) Đúng. Ta có  $g'(x) = 8x \cdot f'(x^2 - 4) + 4x^3 - 16x = 8x \left( f'(x^2 - 4) + \frac{x^2 - 4}{2} \right)$ .

$$\text{Xét } f'(x) + \frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -\frac{x}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \\ x = 4 \end{cases}.$$

Suy ra  $f'(x) + \frac{x}{2}$  là đa thức bậc 3 có các nghiệm  $x = -2, x = 0, x = 4$  nên có dạng

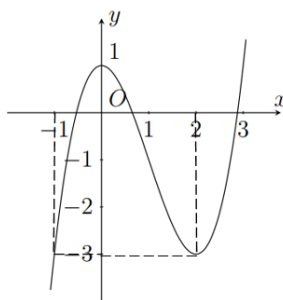
$$f'(x) + \frac{x}{2} = ax(x+2)(x-4), \left( a > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty \right)$$

$$\text{Do đó: } g'(x) = 8ax(x^2 - 4 + 2)(x^2 - 4)(x^2 - 4 - 4) = 8ax(x^2 - 2)(x^2 - 4)(x^2 - 8).$$

$$\text{Ta thấy } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{2} \\ x = \pm 2\sqrt{2} \\ x = 0 \end{cases} \text{ và } g'(x) \text{ đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua các điểm}$$

$x = -2\sqrt{2}, x = -\sqrt{2}, x = \sqrt{2}, x = 2\sqrt{2}$  nên hàm số  $g(x)$  đã cho có 4 điểm cực tiểu.

**Câu 49:** Cho hàm số bậc ba  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ.



Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

- a) Hàm số  $y = f(x)$  có hai điểm cực trị.
- b) Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là  $x = 2$ .
- c) Hàm số  $y = f(f(x))$  có tất cả 5 điểm cực trị.
- d) Cho hàm số  $h(x)$  có đạo hàm  $h'(x) = f(x^3 - 3x^2 + m) + 3$ . Khi đó có tất cả 10 giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $h(x)$  có hoành độ cực trị thuộc đoạn  $[-1; 2]$ .

**Lời giải**

|                |               |                |               |
|----------------|---------------|----------------|---------------|
| <b>a) Đúng</b> | <b>b) Sai</b> | <b>c) Đúng</b> | <b>d) Sai</b> |
|----------------|---------------|----------------|---------------|

- a) Đúng.
- b) Sai. Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là  $M(2; -3)$ .
- c) Đúng. Ta có:

$$y = f(f(x)) \Rightarrow y' = f'(x) \cdot f'(f(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f'(f(x)) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0; x = 2 \\ f(x) = 0 \\ f(x) = 2 \end{cases}$$

Dựa vào đồ thị ta thấy pt:  $f(x) = 0$  có 3 nghiệm phân biệt và  $f(x) = 2$  có một nghiệm.

Vậy hàm số  $y = f(f(x))$  có tất cả 5 điểm cực trị.

**d) Sai.** Ta có:  $h'(x) = 0 \Leftrightarrow f(x^3 - 3x^2 + m) + 3 = 0 \Leftrightarrow f(x^3 - 3x^2 + m) = -3 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x^2 + m = -1 \\ x^3 - 3x^2 + m = 2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x^2 = -1 - m \\ x^3 - 3x^2 = 2 - m \end{cases} (*)$$

Xét hàm số  $g(x) = x^3 - 3x^2$  trên đoạn  $[-1; 2]$

Ta có BBT:

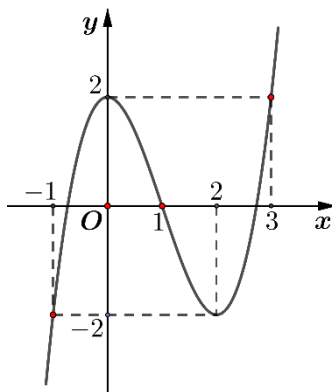
|         |    |   |    |
|---------|----|---|----|
| $x$     | -1 | 0 | 2  |
| $g'(x)$ | +  | 0 | -  |
| $g(x)$  | -4 | 0 | -4 |

Dựa vào bảng biến thiên và yêu cầu bài toán:

$$(*) \Rightarrow \begin{cases} -4 \leq -1 - m \leq 0 \\ -4 \leq 2 - m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq m \leq 3 \\ 2 \leq m \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 6$$

Suy ra  $m \in \{-1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

**Câu 50:** Cho hàm số đa thức bậc bốn  $y = f(x)$  thỏa mãn  $f(0) = \frac{1}{2}$ , hàm số  $f'(x)$  có đồ thị như hình vẽ.



Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

- a) Hàm số  $y = f'(x)$  đạt cực đại tiểu tại  $x = 2$ .
- b) Hàm số  $y = f(x)$  đạt cực đại tại  $x = 2$ .
- c) Hàm số  $y = f(x^2)$  có 4 điểm cực trị.
- d) Hàm số  $g(x) = \left| 18f\left(1 - \frac{x}{3}\right) - x^2 \right|$  có 7 điểm cực trị.

**Lời giải**

|                |               |               |                |
|----------------|---------------|---------------|----------------|
| <b>a) Đúng</b> | <b>b) Sai</b> | <b>c) Sai</b> | <b>d) Đúng</b> |
|----------------|---------------|---------------|----------------|

a) Đúng.

b) Sai. Ta có:  $f' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 (-1 < x_1 < 0) \\ x = 1 \\ x = x_2 (2 < x_2 < 3) \end{cases}$ .

BBT:

|         |           |       |   |       |           |
|---------|-----------|-------|---|-------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $x_1$ | 1 | $x_2$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | -         | 0     | + | 0     | +         |

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số  $y = f(x)$  đạt cực đại tại  $x = 1$ .

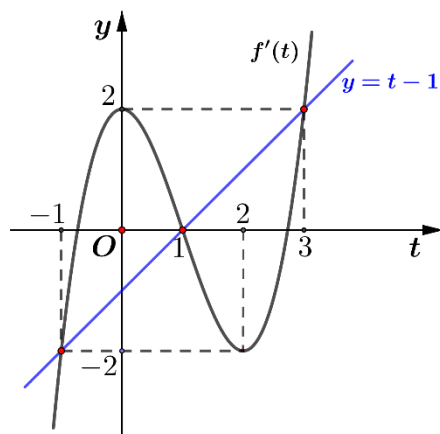
c) Sai. Ta có:

$$y = f(x^2) \Rightarrow y' = 2x \cdot f'(x^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = x_1(L) \\ x^2 = 1 \\ x^2 = x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm \sqrt{x_2} \end{cases}$$

Vậy hàm số  $y = f(x^2)$  có 5 điểm cực trị.

d) Đúng. Xét hàm số  $h(x) = 18f\left(1 - \frac{x}{3}\right) - x^2$ . Ta có:  $h'(x) = -6 \cdot f'\left(1 - \frac{x}{3}\right) - 2x$ .

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow f'\left(1 - \frac{x}{3}\right) = -\frac{x}{3} \Leftrightarrow f'\left(1 - \frac{x}{3}\right) = \left(1 - \frac{x}{3}\right) - 1 \text{ (phương trình có dạng: } f'(t) = t - 1)$$



Dựa vào đồ thị ta thấy:  $f'\left(1 - \frac{x}{3}\right) = \left(1 - \frac{x}{3}\right) - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \frac{x}{3} = -1 \\ 1 - \frac{x}{3} = 1 \\ 1 - \frac{x}{3} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x = 0 \\ x = -6 \end{cases}$

- Từ đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  là đồ thị hàm đa thức bậc ba, có hai điểm cực trị là  $A(0; 2)$  và  $B(2; -2)$ . Suy ra:  $f'(x) = x^3 - 3x^2 + 2 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + 2x + d$ .

Do  $f(0) = \frac{1}{2}$  nên  $d = \frac{1}{2}$ . Ta được:  $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + 2x + \frac{1}{2}$ .

Ta có:

$$h(-6) = 18f(3) - 36 = 18[f(3) - 2] = 18\left(\frac{-1}{4} - 2\right) = -\frac{81}{2}$$

$$h(0) = 18f(1) - 0 = \frac{63}{2}$$

$$h(6) = 18f(-1) - 36 = 18[f(-1) - 2] = 18\left(\frac{-1}{4} - 2\right) = -\frac{81}{2}$$

- Bảng biến thiên:

|                 |           |      |                 |     |                |     |                 |     |                |  |     |  |                |  |     |  |           |
|-----------------|-----------|------|-----------------|-----|----------------|-----|-----------------|-----|----------------|--|-----|--|----------------|--|-----|--|-----------|
| $x$             | $-\infty$ | $-6$ | $0$             | $6$ | $+\infty$      |     |                 |     |                |  |     |  |                |  |     |  |           |
| $h'(x)$         |           | $-$  | $0$             | $+$ | $0$            | $-$ | $0$             | $+$ |                |  |     |  |                |  |     |  |           |
| $h(x)$          | $+\infty$ |      | $-\frac{81}{2}$ |     | $\frac{63}{2}$ |     | $-\frac{81}{2}$ |     | $+\infty$      |  |     |  |                |  |     |  |           |
| $g(x) =  h(x) $ | $+\infty$ |      | $0$             |     | $\frac{81}{2}$ |     | $0$             |     | $\frac{63}{2}$ |  | $0$ |  | $\frac{81}{2}$ |  | $0$ |  | $+\infty$ |

Vậy hàm số  $g(x) = \left| 18f\left(1 - \frac{x}{3}\right) - x^2 \right|$  có 7 điểm cực trị.